Liste d'exercices : Fonctions Exponentielles

Exercice 1 :

A) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x - x - 2$.
On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Dresser le tableau de variation de la fonction g.
2. a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ exactement deux solutions 0 et α. Vérifier que $-1.6 < \alpha < -1.5$.
   b) En déduire le signe de g.
3. a) Montrer que la droite $D : y = -x - 2$ est une asymptote à (C) au voisinage de $(-\infty)$.
   b) Etudier la position de la courbe (C) par rapport à D.
   c) Montrer que la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche infinie parabolique et préciser sa direction.
4. Tracer (C) et (D).

B) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$.
On note (Γ) sa courbe représentative.

1. a) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   b) Montrer que pour tout réel x on a : $f'(x) = e^x.g(x)$.
   c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
2. Montrer que la courbe (Γ) admet au voisinage de $+\infty$ une branche infinie parabolique et préciser sa direction.
3. Montrer que $f(\alpha) = -\dfrac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$.
4. Tracer la courbe (Γ) (On prendra $f(\alpha) \simeq 0,2$).

Exercice 2 :

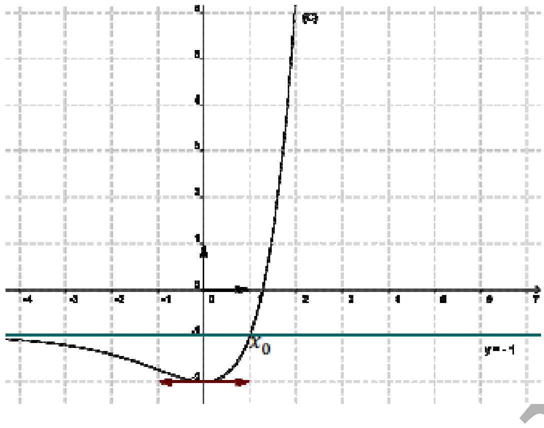
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - 2e^x + 2$ et soit (C) sa courbe représentative.

1. a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
   b) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2e^x(e^x - 1)$.
   c) Dresser le tableau de variation de f.
   d) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) \geq 1$.
2. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 2$.
   b) Etudier alors la position de (C) par rapport à la droite $\Delta : y = 2$.
   c) Etudier les branches infinies de (C).
   d) Tracer (C) et Δ.
3. Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0, +\infty[$.
   a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $[1, +\infty[$.
   b) Construire dans le même repère la courbe (C') de g^{-1}.
4. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x} - 2e^x + 2x$.
   a) Vérifier que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   b) Dresser le tableau de variation de F.
   c) Montrer que l'équation $F(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que $0 < \alpha < ln4$.

Exercice 3 :

La courbe (c) ci-dessous est celle d'une fonction g définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

* La droite d'équation $y = -1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.
* La courbe (C) admet une seule tangente horizontale.
* La courbe (C) coupe l'axe des abscisses en un unique point x_0.



1. En utilisant le graphique :
   a) Déterminer $g(0)$ et $g'(0)$.
   b) Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (ax + b)e^x - 1$ où a et b sont des réelles.
   a) Exprimer $g(0)$ et $g'(0)$ en fonction de a et b.
   b) En utilisant 1.a), en déduire que pour tout réel x, $g(x) = (x - 1)e^x - 1$

   Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{x}$.

   On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.
3. a) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to0^-} f(x)$ et $\lim_{x\to0^+} f(x)$.Interpréter graphiquement les résultats.
   b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
   c) Justifier que la courbe $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction $(o, \overrightarrow{j})$ au voisinage de $+\infty$.
4. a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   b) Dresser le tableau de variation de f.
   c) Montrer que $f(x_0) = \dfrac{1}{x_0 - 1}$.
   d) Tracer $(\mathscr{C})$ (On prendra $x_0 \simeq 1,2$)

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1 + e^x}$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
   b) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et montrer que $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$.
   Interpréter graphiquement les résultats.
2. a) Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = -\dfrac{(2 + e^{-x})}{(1 + e^x)^2}$.
   b) Dresser le tableau de variation de f.
3. a) Justifier que la tangente (T) à la courbe C_f au point d'abscisse 0 a pour équation $y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{2}$.

b) Utiliser le tableau de signe ci-dessous pour préciser la position relative de C_f et (T).

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)+\frac{3}{4}$		$-$	0	$+$	

c) Tracer (T) et C_f.

Exercice 5 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}ln(1+e^{-x})$. On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+e^{x}}$.
   b) Etudier les variations de f.
   c) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}ln(1+e^{x})$.
   d) En déduire que la droite $\Delta : y = -\dfrac{1}{2}x$ est une asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$.
   Etudier la position relative de C_f et Δ.
   e) Tracer C_f et Δ.
2. a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α.
   b) Vérifier que $0 < \alpha < 1$.
3. a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{4}$.
   b) En déduire que tout $x \geq 0$, $|f(x) - \alpha| \leq \dfrac{1}{4}|x - \alpha|$.