Prof AB.Marwen

Série complexe (2)

4ème Tec

2014-2015

Exercice n°1:

Cocher la réponse exacte, avec justification.

1) La forme exponentielle de Z = (-2-2i) est $\begin{cases} 2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}} \\ 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \end{cases}$

2) Une solution de l'équation $2z + \overline{z} + 3 - i = 0$ est $\begin{cases} 1+i \\ -1+i \\ 1-i \end{cases}$

3) Soit $Z = 1 + i\sqrt{3}$ alors $Z^3 = \begin{cases} 8 \\ 8i \\ -8 \end{cases}$

4) Soit A, B, C trois points muni d'un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'affixes respectives Z_A, Z_B, Z_C.

a) si $Z_C = Z_A + Z_B$ alors $\begin{cases} \text{A, B, C sont alignés} \\ \text{A est le milieu de [BC]} \\ \text{OACB est un parallèlogramme} \end{cases}$

b) Si $(Z_C - Z_A) = (3i)(Z_B - Z_A)$

alors $\begin{cases} \text{A, B, C sont alignés} \\ \text{A, B, C sont situés sur le cercle de diametre [BC]} \\ \text{le triangle ABC est rectangle en A} \end{cases}$

Exercice n°2:

1. **a.** Déterminer le module et un argument des complexes suivants :

$z_1 = -3$; $z_2 = 2i$; $z_3 = (1 - i)$ et $z_4 = -1 + i\sqrt{3}$

b. En déduire la forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :

$a = {z_3}^5 . \overline{z_4}$ et $b = -3z_3 . {z_4}^{-3}$

2. Déterminer la forme trigonométrique des complexes suivants :

$u = \sqrt{3} + i$; $v = \frac{-1+i}{\sqrt{3} - i}$ et $w = \sin(\pi/6) + i\cos(\pi/6)$.

3. **a.** Calculer le module et un argument de $z = (\sqrt{3} - i)^{10}$.

b. En déduire sa forme algébrique.

c. Le nombre $(1 - i\sqrt{3})^{21}$ est-il réel ? Justifier.

Exercice n°3:

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

Soit l'équation(E_θ) : $z^2+(2i\,sin\theta-2)z-2e^{i\theta}-1=0$, $\theta\in\,]-\pi\,,\,\pi[$.

1) vérifier que $(2i\,sin\theta-2)^2+8e^{i\theta}+4=(2cos\theta+2)^2$
2) Résoudre alors (E_θ).
3) Soient les points $A(1)\,,M(-e^{i\theta})$ et $N(2+e^{-i\theta})$

   a-Montrer que $Z_{\overrightarrow{AM}}=-2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ et $Z_{\overrightarrow{AN}}=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

   b- En déduire que le triangle AMN est isocèle en A.
4) Pour quelles valeurs de θ le triangle AMN est-il équilatéral ?

Exercice n°4:

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(z)$, associe le point $M'(z')$ tel que $z'=\frac{2(i-\bar{z})}{i+z}$ $z\neq-i$. On considère les points $B(-i)$, $C(i)$, $A(2)$ et $N(\bar{z})$

On désigne par $\mathcal{C}_{(O,2)}$ le cercle de centre O et rayon 2

1) Montrer que $M'\in\mathcal{C}_{(O,2)}$.
2) a- Résoudre dans $\mathbb{C}$ $z'=2$.

   b- En déduire l'ensemble des antécédents de A par f.
3) a- Montrer que $\frac{z'-2}{\bar{z}-i}$ est un réel.

   b- En déduire que les droites (AM') et (CN) sont parallèles.

   c- Expliquer comment construire M'connaissant M
4) La droite (AC) recoupe $\mathcal{C}_{(O,2)}$ en E. Montrer que $f\big((AB)\setminus\{B\}\big)=\{E\}$

Exercice n°5:

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'éqution : $\mathbf{Z^2-(1+3i)Z-4=0}$.

2) On considère l'équation (E) : $\mathbf{Z^3-(1+i)Z^2-(2i-2)Z-8i=0}$.

a)Montrer que l'équation (E) possède une solution imaginaire pure qu'on notera Z_0.

b)Déterminer les nombres complexes a et b tels que :

$$\mathbf{Z^3-(1+i)Z^2-(2i-2)Z-8i=(Z+2i)(Z^2+aZ+b)}.$$

c) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$, l'éqution (E).

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$, on désigne par A , B et C , les points d'affixes respectives : $Z_A=-1+i$, $Z_B=-2i$ et $Z_C=2+2i$.

a) Ecrire sous forme exponentielle Z_A , Z_B et Z_C .

b) Justifier que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\arg\left(\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}\right)[2\pi]$.

c) En déduire la nature du triangle ABC .

d) on considère les points E et D tels que ABEC et ABCD soient deux parallélogrammes .

(i) Déterminer Z_E et Z_D.

(ii) Prouver que les points E , C et D sont alignés .