Devoir à la maison n° 01

N.B : La présentation et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice n°01 **(4 pts :2,5+1,5) :**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, *on donne les points* M_1 et M_2 *d'affixes respectives* $z_1 = e^{i\theta}$ et $z_2 = i\,e^{i\theta}$; $\theta \in [0,2\pi[$

1/ a) Déterminer le module et un argument de $z = z_1 - z_2$

b) Déterminer θ *pour que* z *soit réel.*

2/ Soit le point I *d'affixe* $1+i$ *. Déterminer les valeurs de* θ *pour les quelles les trois points* I, M_1 et M_2 *soient alignés.*

Exercice n°02 **(6 pts : 1+2+2+1):**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

1/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation d'inconnue* z : $(E): z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta \,;\, \theta \in]0,\pi[$

On notera α et β *les solutions de* (E).

2/ On note A *et* B *les points du plan complexe d'affixes respectives* α *et* β

a) Placer A *et* B *sur une figure en faisant apparaître* θ *comme la mesure principale d'un angle orienté.*

b) Pour quelle(s) valeur(s) de θ *le triangle OAB est-il équilatéral ?*

3/ Soit $n \in \mathbb{N}$

a) Calculer $\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}$ *en fonction de* θ.

b) Quelle est la partie réelle de $(1+\alpha)^n$ *?*

4/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation d'inconnue* z : $(F): z^2 + \frac{1}{z^2} = 2\cos\theta$

Exercice n°03 **(4 pts : 0,5+3+0,5):**

Soit $f(x) = \frac{x - \sin x}{1+x^2}$

1/ Déterminer D_f *(le domaine de définition de* f *).*

2/a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x-1}{1+x^2} \le f(x) \le \frac{1+x}{1+x^2}$

b) En déduire $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

c) Interpréter graphiquement ces deux limites.

3/ Montrer que l'équation $f(x) = 0$ *admet une solution* $\alpha \in]-1,1[$

Exercice n°04 **(6 pts :1+3+1+1):**

Soit $g(x)=\begin{cases} 2x+\dfrac{\cos x}{x} & \text{si } x<0 \\ \sqrt{x^2+1} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

1/ Déterminer D_g *(le domaine de définition de* g *)*

2/ a) Montrer que pour tout $x<0$ *on a :* $\dfrac{1}{x}\leq\dfrac{\cos x}{x}\leq-\dfrac{1}{x}$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

c) Montrer que la droite d'équation $y=2x$ *est une asymptote à* (ξ_g) *au voisinage de* $-\infty$.

3/ Calculer $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$ *. Interpréter le résultat graphiquement.*

4/ Trouver la nature de la branche infinie de (ξ_g) *au voisinage de* $+\infty$ *.*