EXERCICE N°1

Soit $(u_n)_{n\in N}$ *la suite réelle définie par :* $u : \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{5}u_n + 3 \end{cases}$

Partie A

1°) Calculer u_1 *et* u_2 *. u est-elle une suite géométrique ? u est-elle une suite arithmétique ?*

2°)Montrer que : pour tout n de N : $2 \le u_n \le 5$ *.*

3°)Montrer que (u) est croissante sur N .

4°)En déduire que (u) est convergente et calculer sa limite.

Partie B

On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 5$ *.*

1°)Montrer que (v) soit une suite géométrique

2°)Exprimer v_n *puis* u_n *en fonction de n.*

3°)Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ *.*

4°)Soit pour tout n de N : $s_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$ *et* $s'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$

a- Exprimer s_n *puis* s'_n *en fonction de n*

b- Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} s'_n$

EXERCICE N° 2

Soit $(u_n)_{n\in N}$ *la suite réelle définie par :* $u : \begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{1+u_n} \end{cases}$

Partie A

1°)Montrer que : pour tout n de N : $0 < u_n \le 1$ *.*

2°)Montrer que (u) est croissante sur N .

3°)En déduire que (u) est convergente et calculer sa limite.

Partie B

On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = \dfrac{1}{u_n} - 1$ *.*

1°)Montrer que (v) soit une suite géométrique

2°)Exprimer v_n *puis* u_n *en fonction de n.*

3°)Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ *.*

EXERCICE N° 3

Soit $(u_n)_{n\in N}$ *la suite réelle définie par :* $u : \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n^{\,2}}{2}} \end{cases}$

Partie A

1°)Montrer que : pour tout n de N : $u_n \ge 1$ *.*

2°)Montrer que pour tout n de N : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1 - u_n^{\,2}}{2(u_{n+1} + u_n)}$

3°)En déduire le sens de variations de (u).

4°)En déduire que (u) est convergente et calculer sa limite.

Partie B

On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = u_n^{\,2} - 1$ *.*

1°)Montrer que (v) soit une suite géométrique

2°)Exprimer v_n *puis* u_n *en fonction de n.*

3°)Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ *.*

EXERCICE N°4

Soient a et b deux réels tels que $0<a\leq b$ *et* (u_n) *la suite définie par :*

$u_1=a+b$ *et* $\forall n\in N^*$: $u_{n+1}=a+b-\dfrac{ab}{u_n}$.

1°) On suppose que $a<b$.

(a) *Montrer que* (u_n) *est minorée par b .*

(b) *Etudier la monotonie de la suite* (u_n) *en déduire qu'elle est convergente.*

2°) Soit v la suite définie par : $\forall n\in N^*$: $v_n=\dfrac{u_n-b}{u_n-a}$

(a) *Montrer que v est une suite géométrique.*

(b) *En déduire* u_n *en fonction de n , a et b*

(c) *Calculer alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3°) On suppose que $a=b$.

(a) *Calculer* u_1,u_2,u_3,u_4 *en fonction de a .*

(b) *Exprimer alors* u_n *en fonction de n et a puis* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

EXERCICE N°5

Soit la fonction $f:R_+\to R$, $x\mapsto f(x)=\sqrt{4+3x}$.

On considère la suite réelle u définie par $u_0=0$ *et* $\forall n\in N$: $u_{n+1}=f(u_n)$

1°)(a) Montrer que : $\forall n\in N$: $0\leq u_n\leq 4$

(b) *Etudier la monotonie de u .*

(c) *En déduire que u est convergente .*

2°)(a) Montrer que : $\forall n\in N$, $|u_{n+1}-4|\leq \dfrac{3}{4}|u_n-4|$

(b) *En déduire :* $\forall n\in N$, $|u_n-4|\leq 4\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$. *En déduire alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

EXERCICE N°6

On définit la suite réelle (u_n) *par* $u_0=2$ *et la relation* $u_{n+1}=\dfrac{u_n^2+5}{2u_n}$ *, pour tout* $n\in N$.

On pose alors $v_n=\dfrac{u_n-\sqrt{5}}{u_n+\sqrt{5}}$.

1°) Montrer que, pour tout $n\in N$, $u_n>0$.

2°) Soit $n\in N$. *Montrer que* $v_{n+1}=v_n^2$. *En déduire que* $v_n=(v_0)^{2^n}$.

3°) Prouver que $v_0=\dfrac{-1}{(2+\sqrt{5})^2}$ *et que* $|v_0|<\dfrac{1}{16}$.

4°) En déduire la limite de la suite (v_n) *puis celle de la suite* (u_n).

EXERCICE N°7

On pose pour tout n de N :* $I_n=\displaystyle\int_1^e x^2(\mathrm{Log}x)^n\,dx$

1°)Calculer $I_0=\displaystyle\int_1^e x^2dx$

2°)A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1

3°) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour n de N :* $3I_{n+1}+(n+1)\,I_n=e^3$

4°)En déduire I_2 .

5°)Démontrer que , pour tout n de N, I_n *est positive.*

6°)Déduire de la question 3 que pour tout n de IN :* $I_n\leq\dfrac{e^3}{n+1}$

7°)Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

EXERCICE N°8

On définit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x dx$.

1°) Calculer I_0 et J_0

2°) En intégrant par parties I_n puis J_n montrer que : $\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases}$

3°) En déduire les expressions de I_n et J_n en fonction de n.

4°) Déterminer la limite de I_n et celle de J_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE N°10

On considère la suite (U_n) définie par : pour tout entier naturel n non nul, $U_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$

1°)Montrer que la fonction $f : t \mapsto (2-t)e^t$ est une primitive de $g : t \mapsto (1-t)e^t$ sur $[0, 1]$.
En déduire la valeur de U_1.

2°)Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n non nul, $U_{n+1} = (n+1) U_n - 1$

3°) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $U_n \geq 0$

4°)a) Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; 1]$ et pour tout entier naturel non nul n :
$(1-t)^n e^t \leq e \times (1-t)^n$

b) En déduire que pour tout n non nul, $U_n \leq \frac{e}{n+1}$

5°)Déterminer la limite de la suite (U_n)

EXERCICE N°11

Pour n entier naturel non nul on définit la suite (S_n) par : $S_n = 1 + \frac{1}{2^{1/3}} + \frac{1}{3^{1/3}} + \ldots + \frac{1}{n^{1/3}}$

1°) Justifier pour k entier naturel non nul l'encadrement : $\frac{1}{(k+1)^{1/3}} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^{1/3}} \leq \frac{1}{k^{1/3}}$

2°) En déduire l'encadrement : $\int_1^{n+1} \frac{dx}{x^{1/3}} \leq S_n \leq \int_1^n \frac{dx}{x^{1/3}} + 1$.

3°) que peut-on dire de la suite (S_n) ?

4°) A l'aide d'encadrements analogues, montrer que la suite (T_n) définie par : $T_n = 1 + \frac{1}{2^{4/3}} + \frac{1}{3^{4/3}} + \ldots + \frac{1}{n^{4/3}}$

est convergente

EXERCICE N°12

On considère la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^3}$ et on pose pour tout n de N^* : $s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$

1°)Vérifier que f est décroissante et positive.

2°)Montrer que (s_n) est décroissante.

3°)Calculer $\int_1^n f(t)dt$, $n \geq 1$ et en déduire que $0 \leq \int_1^n f(t)dt \leq \frac{1}{2}$ et calculer $\lim_{n \to +\infty} \left(\int_1^n f(t)dt \right)$.

4°)Montrer que pour tout entier $k \geq 2$: $\int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)dt$

5°)En déduire que pour $n \geq 1$: $\int_2^{n+1} f(t)dt \leq s_n - f(1) \leq \int_1^n f(t)dt$

6°)En déduire que (s_n) est convergente et donner un encadrement de sa valeur.

EXERCICE N°13

1°) Soit $x > -1$. Démontrer : $\ln(1+x) \leq x$.

2°) Soit k dans $]0, 1[$ et soit (u_n) définie par $u_n = \prod_{p=0}^{n} (1 + k^p)$

a) Montrer que (u_n) est croissante.

b) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \ln(u_n)$ est majorée.

c) Montrer que (u_n) est convergente.