

EXERCICE N°1

Soient $z_1 = \frac{2009+i2008}{2009-i2008}$ et $z_2 = \frac{2009-i2008}{2009+i2008}$

Montrer que $z_1 + z_2$ est réel et que $z_1 - z_2$ est imaginaire pur.

EXERCICE N°2

Soit a, b et c trois nombres complexes de modules sont égaux à 1 et tel que: $a + b + c = 1$. Calculer $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

EXERCICE N°3

z désigne un nombre complexe différent de $2i$.

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) (unité graphique: 3 cm). On désigne par A le point d'affixe $2i$. A tout point M du plan, distinct de A , d'affixe z , on associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = \frac{z+2i}{z-2i}$.

1°) Calculer l'affixe du point N' image par f du point N d'affixe $\sqrt{3} + i$.

2°) Calculer l'affixe du point Q dont l'image est le point Q' d'affixe $1 + i$.

3°) Soit un complexe z distinct de $2i$, on pose: $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, avec x, y, x' et y' réels.

Démontrer que: $x' = \frac{x^2 + y^2 - 4}{x^2 + (y-2)^2}$ et $y' = \frac{4x}{x^2 + (y-2)^2}$

4°) Déterminer et représenter les ensembles de points M d'affixe z tels que:

a) z' est réel

b) z' est de module 1

EXERCICE N°4

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$

Soit $Z = \frac{z+1}{z-i}$ avec $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$

1°) Déterminer l'ensemble des points M , images de z , tels que $|Z| = 1$

2°) En déduire l'ensemble des points M , images de z , tels que $\left| \frac{z+1}{z-i} \right| = 1$

3°) Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y .

4°) Déterminer l'ensemble des points M , images de z , tels que Z soit un réel.

5°) Déterminer l'ensemble des points M , images de z , tels que Z soit imaginaire pur.

6°) Déterminer l'ensemble des points M , images de z , tels que $\arg(Z) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

EXERCICE N°5

Soit: $z = 1 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1)$

1°) Soit $z' = (1+i)z$. Ecrire z' sous la forme cartésienne puis sous la forme trigonométrique

2°) En déduire z sous leurs formes trigonométriques.

3°) En déduire alors la valeurs de $\sin \frac{\pi}{12}$ et $\cos \frac{\pi}{12}$

EXERCICE N°6

Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$

1°) Ecrire z sous forme trigonométrique puis exponentielle.

$z_1 = \sin \theta + i \cos \theta$, $z_2 = 1 + \cos \theta + i \sin \theta$, $z_3 = \frac{\sin \theta + i \cos \theta}{1 + \cos \theta + i \sin \theta}$

2°) Déterminer l'ensemble des points $M_i (z_i)_{i \in \{1,2,3\}}$ lorsque θ décrit $[0, \pi[$.

EXERCICE N°7

On donne dans le plan complexe trois points M, N et P d'affixes respectives z, z^2 et z^3 . Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels le triangle MNP est rectangle en M .

EXERCICE N°8

Soit $z = \sqrt{6} + \sqrt{2} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

1°) Calculer z^2 .



2°) Déterminer le module et un argument de z^2 .

3°) En déduire le module et un argument de z .

EXERCICE N°9

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Montrer que : $e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 2 \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}$ et $e^{i\alpha} - e^{i\beta} = 2i \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}$

EXERCICE N°10

Résoudre dans \mathbb{C} :

1°) $z^2 - 2z \cos \varphi + 1 = 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$; 2°) $(z-1)^6 = (z-1)^3 + 1$;

3°) $(1-i)z^2 - (5+i)z + 6 + 4i = 0$; 3°) $z^5 = \frac{8(1+i)}{\sqrt{3-i}}$; 4°) $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^4 = \frac{1+ia}{1-ia}$ où $a \in \mathbb{R}$.

EXERCICE N°11

On considère l'équation (E) : $z^3 + (2-2i)z^2 + (5-4i)z - 10i = 0$.

1°) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure.

2°) Résoudre alors (E) dans \mathbb{C} .

EXERCICE N°12

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^3 + (2-3i)z^2 - (7+i)z + 17i - 2 = 0$, sachant qu'elle admet une racine réelle.

EXERCICE N°13

On considère l'équation (E) : $z^4 - 2z^3 - z^2 - 2z + 1 = 0$.

1°) Vérifier que (E) est équivalente au système :
$$\begin{cases} Z = z + \frac{1}{z} \\ Z^2 - 2Z - 3 = 0 \end{cases}$$

2°) En déduire la résolution de (E) dans \mathbb{C} .

Exercice n°3

On considère le polynôme P défini sur \mathbb{C} par : $P(z) = z^4 + 2z^3 + 6z^2 + 8z + 8$.

1°) Justifier que : $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$.

En déduire que si z_0 est une racine de P , alors son conjugué est aussi une racine de P .

2°) a) Résoudre l'équation $P(z) = 0$ sachant qu'elle admet deux racines imaginaires pures.

b) Déterminer la forme trigonométrique de chacune des solutions de l'équation précédente.

3°) Soient M_1, M_2, M_3 et M_4 les points d'affixes respectives $-2i, 2i, -1+i$ et $-1-i$.

a) Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le plan complexe et démontrer que $M_1M_2M_3M_4$ est un trapèze isocèle.

b) Démontrer que les points M_1, M_2, M_3 et M_4 appartiennent à un même cercle de centre A d'affixe 1 dont on précisera le rayon.

EXERCICE N°14

Soit $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et (E_φ) l'équation : $z^2 - (3 \cos \varphi + 1 + i \cos \varphi)z + 2 \cos \varphi (\cos \varphi + 1 + i \cos \varphi) = 0$

1°) Montrer que l'équation (E_φ) admet une solution réelle z_1 que l'on calculera et en déduire l'autre solution z_2 .

2°) Soit M_1 et M_2 les points d'affixes respectifs z_1 et z_2 .

(a) Déterminer l'ensemble des points M_1 lorsque φ décrit l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

(b) Montrer que $M_1M_2^2 = \frac{1}{2} + 2\left(\cos \varphi - \frac{1}{2}\right)^2$.

(c) Pour quelle valeur de φ la distance entre M_1 et M_2 est maximale.

(a) Déterminer le réel φ tel que OAB soit isocèle.

EXERCICE N°15

Pour tout nombre complexe z on pose : $f(z) = z^3 + 2(i - \sqrt{3})z^2 + 4(1 - i\sqrt{3})z + 8i$

1°) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ possède une racine imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.

2°) Résoudre alors l'équation $f(z) = 0$.

On notera z_1 et z_2 les deux autres racines, tel que $\text{Im}(z_1) < 0$.

3°) On pose $\omega = \frac{z_1}{z_0}$. Donner la forme trigonométrique de ω .



4°) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

A tout nombre complexe z non nul on associe les points M, M_1 et M_2 d'affixe respectives $z, \omega z$ et $\omega^2 z$.

Montrer que OMM_1M_2 est un losange.

EXERCICE N°16

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère les applications : $f : C - \{-i\} \rightarrow C - \{-i\} ; z \mapsto f(z) = \frac{z-1}{i(z+i)}$

et $F : \wp - \{B\} \rightarrow \wp - \{B\} ; M(z) \mapsto F(M) = M'(z' = f(z))$ où B est le point d'affixe $(-i)$.

1°) Montrer que f est involutive (c-a-d $f \circ f = Id_{C - \{-i\}}$) et en déduire que f est bijective.

2°)(a) Vérifier que $\forall z \in C \setminus \{-i\}, z' + i = \frac{-1+i}{z+i}$.

(b) En déduire que $\forall M \in P \setminus \{B\}, \left\{ \begin{array}{l} BM \times BM' = \sqrt{2} \\ (\vec{u}, \overrightarrow{BM}) + (\vec{u}, \overrightarrow{BM'}) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi] \end{array} \right.$

3°) Déterminer les images par F de la droite $(D) : y=x-1$ et du cercle (C) de centre B et de rayon 1.

EXERCICE N°17

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points M_n d'affixes

$z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (1 + i\sqrt{3})$ où n est un entier naturel.

1°) Exprimer z_{n+1} en fonction de z_n .

Donner z_0, z_1, z_2, z_3 et z_4 sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

2°) Placer les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 (unité graphique : 4 cm).

3°) Déterminer la distance OM_n en fonction de n .

4°) a) Montrer que l'on a $M_n M_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$ pour tout n entier naturel.

b) On pose $L_n = \sum_{k=0}^n M_k M_{k+1} = M_0 M_1 + M_1 M_2 + \dots + M_n M_{n+1}$.

Déterminer L_n en fonction de n , puis la limite de L_n quand n tend vers $+\infty$.

