Limites et continuité

Séance 2

EXERCICE 1:

On considère la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = x\left(1 - \cos\frac{1}{x}\right) + 2 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \frac{2-x^2}{1+x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

1) Montrer que pour tout $x \in]-\infty,0[$ on a : $2x+2 \leq f(x) \leq 2$
2) En déduire que f est continue en 0.
3) a) Montrer que la fonction $u : x \mapsto \cos\frac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty,0[$.
   b) En déduire que la fonction f est continue sur IR
4) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)$

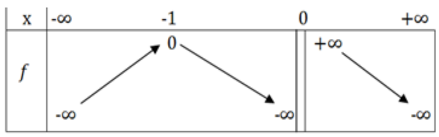
EXERCICE 2:

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} x^3 + x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 + x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1) a) Montrer que, pour tout $x > 0$, $1 - x \leq f(x) \leq 1 + x$.
   b) Etudier la continuité de f en 0.
2) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]-\infty, 0[$ une unique solution α .
   b) Vérifier que $-0.7 < \alpha < -0.6$
3) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right)$.

EXERCICE 3:

Voici le tableau de variation d'une fonction f définie et continue sur IR\{0}.



1) Déterminer chacune des limites suivantes :
$\lim\limits_{x \to -\infty} f\left(-1+\frac{1}{x^2}\right)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(\sqrt{x})$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f\left(x^3 + \frac{1}{x+1}\right)$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{1 - f o f(x)}$ et $\lim\limits_{x \to -1} \frac{1}{f(x)}$
2) Déterminer l'image par f de chacun des intervalles suivants :
   $]-\infty, -1]$, $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$
3) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dans IR\{0}
   b) En déduire le tableau signe de $f(x)$ pour tout $x \in$ IR \ {0}.

EXERCICE 4:

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{1-2x}}$ définie et dérivable sur $]-\infty,\frac{1}{2}[$ et voici son tableau de variation

1) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2x+4}\right)$
2) Soit la fonction g définie sur $]-\infty,\frac{1}{2}[$ par : $g(x) = f(x) - x$
   a) Déterminer l'image de $]-\infty,\frac{1}{2}[$ par g.
   b) En déduire que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α dans $]-\infty,\frac{1}{2}[$.

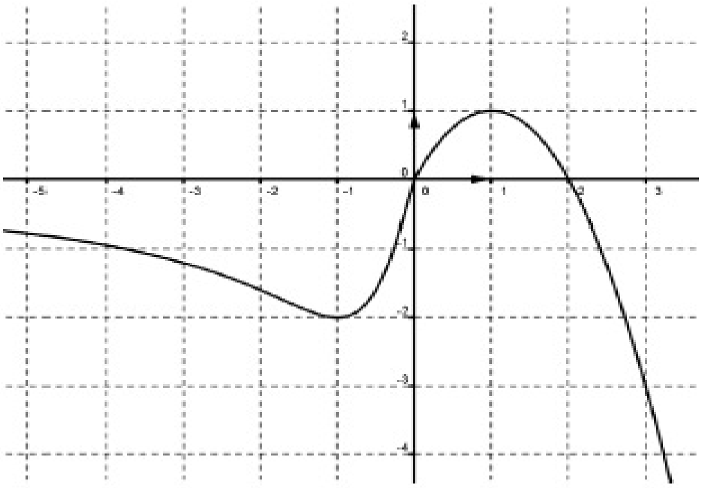
Vérifier que $-0{,}7 < \alpha < -0{,}6$

c) Montrer que : $\alpha^2(1-2\alpha) = 1$

EXERCICE 5:

C_f **admet au voisinage de :**

- $-\infty$ **une asymptote d'équation** $y = 0$.
- $+\infty$ **une branche infinie parabolique de direction la droite d'équation** $x = 0$



1) **Déterminer :** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

2) **Déterminer :** $f(IR)$ **et** $f\circ f(IR)$

3) a- **Déterminer graphiquement le domaine de définition de** f,
de $u = \dfrac{1}{f}$ **et de** $v = \sqrt{f}$.

b- **La fonction** u **est elle prolongeable par continuité en 2?**

4) **On considère la fonction** $g : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ **et la fonction** $h = g\circ f$

a – **Montrer que** h **est continue sur** $]2,+\infty[$.

b – **Déterminer** $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ **et** $h(3)$.

5) **Soit** k **la fonction définie sur** $\mathbb{R}$**, par** $k(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geq 0 \\ x^2\left(1-\cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\right) & \text{si } x < 0 \end{cases}$

a – **Montrer que pour tout** $x < 0$, **on a** $0 \leq k(x) \leq 2x^2$.

b – **En déduire que** k **est continue en 0.**

c – **Montrer que** $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x) = \dfrac{\pi^2}{2}$. **Interpréter graphiquement le résultat.**