

Dérivabilité d'une fonction Equations à coefficients complexes

Séance 4

EXERCICE 1:

- 1) a) Calculer $(2 + i)^2$
 b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $(E) : z^2 - 3(2 + i)z + 2(3 + 4i) = 0$
- 2) Soit l'équation $(E') : z^3 - 2(3 + 2i)z^2 + (3 + 14i)z + 8 - 6i = 0$
 - a) Montrer que l'équation (E') admet dans \mathbb{C} une solution imaginaire pure z_1 .
 - b) Soit le polynôme $P(z) = z^3 - 2(3 + 2i)z^2 + (3 + 14i)z + 8 - 6i$
 Déterminer les complexes a , b et c tels que : $P(z) = (z - z_1)(az^2 + bz + c)$
 - c) Résoudre alors dans \mathbb{C} l'équation (E') .

EXERCICE 2:

Pour tout réel $\theta \in]0, \pi[$ on donne l'équation dans \mathbb{C} :

$$(E_\theta) : z^2 - e^{i\theta}(1 + e^{i\theta})z + e^{i3\theta} = 0$$

- 1) a) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E_θ) .
 b) En déduire les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $(E'_\theta) : z^6 - e^{i\theta}(1 + e^{i\theta})z^3 + e^{i3\theta} = 0$.
- 2) Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . Soient A, B et C les points du plan d'affixes respectives $1, e^{i\theta}$ et $e^{i2\theta}$.
 - a) Montrer que le triangle ABC est isocèle en B.
 - b) Montrer que ABC est équilatéral si et seulement si $|1 + e^{i\theta}| = 1$
- 3) a) Déterminer le module et un argument du complexe $1 + e^{i\theta}$.
 b) En déduire les valeurs de θ pour lesquelles le triangle ABC soit équilatéral

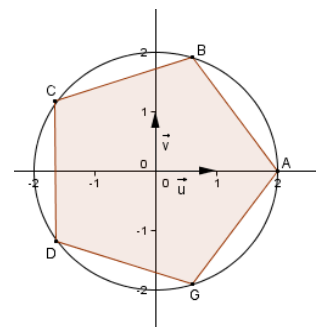
EXERCICE 3:

I/ 1) Déterminer les racines quatrièmes puis les racines sixièmes du nombre complexe

$$z = -32 + i.32\sqrt{3}$$

- 2) Représenter dans chacun des deux cas les images des solutions sur le cercle de centre O dont on précisera le rayon.

II/ Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . Dans la figure ci-contre ABCDE est un pentagone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 2 et A(2,0). Donner les affixes des points B, C, D et E.



EXERCICE 4:

Soit f une fonction deux fois dérivable sur \mathbb{R} et dont la fonction dérivée f' varie comme l'indique le tableau ci-contre :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	-1	2	0

Répondre par **vrai** ou **faux**

1. La courbe de f admet deux tangentes horizontales.
2. Le point d'abscisse 1 est un point d'inflexion pour la courbe de f .
3. Pour tous réels a et b , on a $|f(a) - f(b)| \leq 2|a - b|$.
4. Si $f'(0) = f(0) = 1$ alors $(f \circ f)'(0) = 2$.

EXERCICE 5:

La fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

- 1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. En déduire une interprétation géométrique.
 b) Montrer que f est dérivable sur $I =]0, +\infty[$ et que $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} \quad \forall x \in I$.
- 2) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0, +\infty[$.
- 3) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $g(x) = f\left(\frac{1}{x^2}\right)$
 Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et calculer $g'(x)$ en fonction de x .

EXERCICE 6:

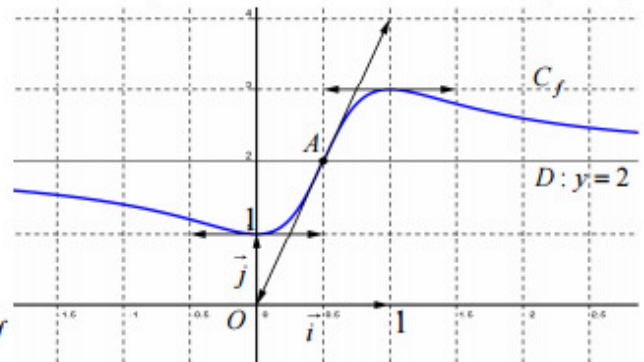
Sur la figure ci-contre est tracée la courbe représentative notée C_f dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) d'une fonction f définie sur \mathbb{R} .

On sait que :

- La droite D d'équation $y = 2$ est asymptote à la courbe C_f en $+\infty$ et en $-\infty$.

- La courbe C_f admet deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses.

- $A\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ est un centre de symétrie pour la courbe C_f



Quelle est parmi les trois courbes tracées ci-dessous, la courbe représentative de la fonction f' ? Justifier votre réponse.

