Dérivabilité d'une fonction
Equations à coefficients complexes

Séance 1

EXERCICE 1:

La fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ et (C) sa courbe selon un repère orthonormé $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. En déduire une interprétation géométrique.

b) Montrer que f est dérivable sur $I=]0,+\infty[$ et que $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$ $\forall\, x \in I$.

2) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0,+\infty[$.

3) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $[0,+\infty[$ puis vérifier que $0{,}2 < \alpha < 0{,}3$

4) Soit la fonction g définie sur $]-\infty,0[$ par $g(x) = f\left(1-\frac{1}{x}\right)$

Montrer que g est dérivable sur $]-\infty,0[$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]-\infty,0[$.

EXERCICE 2:

Soit f la fonction définie sur $]-\infty,-1] \cup [0,+\infty[$ par : $f(x) = x\sqrt{x^2+x}$. On désigne par (C) sa courbe selon un repère orthonormé $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et à gauche en (-1). En déduire une interprétation géométrique.

2) Etablir le tableau de variation de la fonction f.

3) Etudier les branches infinies de (C).

4) Soit la fonction g définie sur IR par $\begin{cases} g(x) = f(x) & si\ \ x \geq 0 \\ g(x) = x^3+3x^2 & si\ \ x < 0 \end{cases}$

a) Montrer que g est dérivable sur IR.

b) Etablir le tableau de variation de la fonction g

c) Montrer que le point A(-1,2) est un point d'inflexion de (C).

EXERCICE 3:

1) Déterminer les racines cubiques de l'unité puis les racines quatrièmes du nombre complexe z= $-8+i.8\sqrt{3}$

2) Représenter dans chacun des deux cas les images des solutions sur le cercle de centre O dont on précisera le rayon.

EXERCICE 4:

1) a) Résoudre dans C l'équation : $z^2 - 2z + 2 = 0$. Ecrire les solutions sous la forme exponentielle.

   b) En déduire les solutions dans C de l'équation : $z^4 - 2z^2 + 2 = 0$.

2) On considère dans C l'équation (E_θ) : $z^2 - 2z + 1 + e^{2i\theta} = 0$ avec $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

   a) Vérifier que $ie^{i\theta}$ est une racine carrée de $-e^{2i\theta}$

   b) Résoudre dans C l'équation (E_θ) .

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points : A , B et C d'affixes respectifs $z_A = 1 + ie^{i\theta}$, $z_B = 1 - ie^{i\theta}$ et $z_C = 2$ avec $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

   a) Calculer l'affixe z_I du point I milieu de [AB].

   b) Montrer que : $z_A = 2\cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}$ et que $z_B = 2\sin(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}$

   c) Montrer que le quadrilatère OACB est un rectangle.

   d) Déterminer la valeur de θ pour laquelle le quadrilatère OACB soit un carré.