

# Dérivabilité d'une fonction Comportement asymptotique

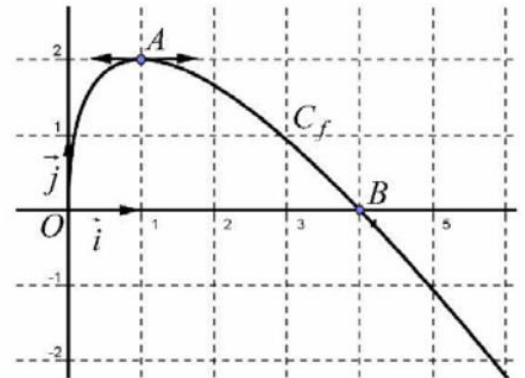
Séance 1

## EXERCICE 1:

Sur la figure ci-contre est tracée la courbe représentative notée  $C_f$  d'une fonction  $f$  définie et dérivable sur

$]0, +\infty[$  dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . On sait que :

- La courbe  $C_f$  admet au point  $A(1,2)$  une tangente d'équation  $y = 2$ .
- La courbe  $C_f$  passe par le point  $B(4,0)$ .



- 1) a - Déterminer  $f'(1)$ .  
b - Comparer  $f'\left(\frac{1}{2}\right)$  et  $f'(2)$
- 2) Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $g(x) = [f(x)]^2$ .  
a - Exprimer  $g'(x)$  en fonction de  $x$ .  
b - Dresser le tableau de variation de  $g$ .

## EXERCICE 2:

Soit la fonction  $f : x \mapsto \frac{x^2}{x-2}$  On désigne par (C) sa courbe représentative selon un repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son domaine de définition.
- 2) a) Montrer que la droite  $D : y = x + 2$  est une asymptote à (C) au voisinage de  $+\infty$  et au voisinage de  $-\infty$ .  
b) Etudier la position de la droite  $D$  par rapport à la courbe (C).
- 3) Etablir le tableau de variation de  $f$ .

## EXERCICE 3:

Soit la fonction  $f$  définie sur  $[-3, +\infty[$  par  $f(x) = x\sqrt{2x+6}$  et (C) sa courbe selon un repère orthonormé du plan.

- 1) Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite en  $(-3)$ . En déduire une interprétation géométrique
- 2) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]-3, +\infty[$  et que  $f'(x) = \frac{3x+6}{\sqrt{2x+6}} \forall x \in ]-3, +\infty[$ .
- 3) Etablir le tableau de variation de  $f$ .
- 4) a) Vérifier que la courbe (C) passe par les points  $A(-1, -2)$  et  $B(1, 3)$ .  
b) Montrer que la courbe (C) admet au moins une tangente parallèle à la droite (AB).

### EXERCICE 4:

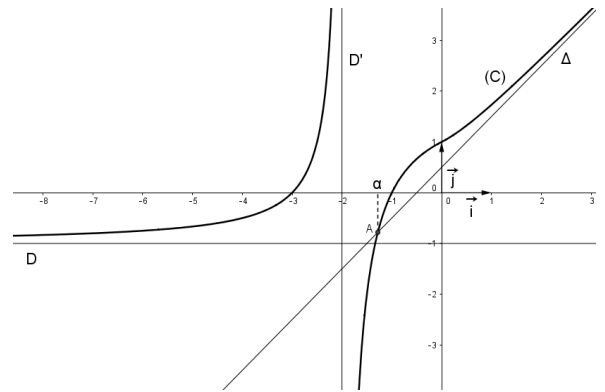
On donne la courbe représentative (C) d'une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ .

(Voir la figure ci-contre)

✖ La droite  $\Delta : y = x + \frac{1}{2}$  est une asymptote à (C) au voisinage de  $+\infty$

✖ La droite D :  $y = -1$  est une asymptote horizontale à (C) au voisinage de  $-\infty$

✖ La droite D' :  $x = -2$  est une asymptote verticale à (C) à droite et à gauche.



1) Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) ; \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) ; \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ f(x) - x - \frac{1}{2} \right]$$

2) Dresser le tableau de variation de  $f$

3) Dresser le tableau de signe de l'expression  $d(x) = f(x) - x - \frac{1}{2}$

4) Déterminer les limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)+1}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)-x}{f(x)-x-\frac{1}{2}}$

### EXERCICE 5:

Soit la fonction  $f : x \mapsto \frac{x^2+x+1}{x-1}$ . On désigne par (C) sa courbe représentative selon un repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) Etablir le tableau de variation de la fonction  $f$ .

2) Vérifier que  $f(x) = x + 2 + \frac{3}{x-1}$  pour tout réel  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

3) En déduire que la courbe (C) admet une asymptote oblique  $\Delta$  au voisinage de  $+\infty$  et au voisinage de  $-\infty$  dont on donnera une équation.

4) Etudier la position de (C) par rapport à  $\Delta$ .

### EXERCICE 6:

Soit la fonction  $f$  définie sur  $] -1, +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$  On note (C) sa courbe représentative selon un repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $] -1, +\infty[$  et que :  $f'(x) = \frac{x+2}{2(\sqrt{x+1})^3} \quad \forall x \in ] -1, +\infty[$ .

2) Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .

3) a) Ecrire une équation cartésienne de la tangente (T) à (C) au point O.

b) Montrer que  $f(x) - x = \frac{-x^2}{\sqrt{x+1}(1+\sqrt{x+1})}$ . En déduire la position de (C) par rapport à (T).

### EXERCICE 7:

La fonction  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

1) a) Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite en 0. En déduire une interprétation géométrique.

b) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $I = ]0, +\infty[$  et que  $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} \quad \forall x \in I$ .

2) Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$  sur  $[0, +\infty[$ .