REPUBLIQUETUNISIENNE **PROF/ MABROUKI SALAH**

MINESTRE DE L'EDUCATION ET DE LAFORMATION **SERIE N°5** **SEANCE N°15**

SECTION / 3 EME TECHNIQUE-EXP-MATHS

©©©NOMBRES COMPLEXES ©©©

EXERCICEN°1

Vrai- Faux

A) On donne $z = 2 - 3i$ et $z' = 3 + i$.

1) $Re(z \cdot z') = 6$. 2) $Im(z \cdot z') = -7$ 3) $\frac{1}{z}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}i$ 4) $\frac{1}{z'}=\frac{3}{8}-\frac{1}{8}i$

5) $Re(z^2) = -5$

B) 1) L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$ 2) L'affixe du milieu I de [AB] est $\frac{1}{2}$ $(z_B - z_A)$

3) L'affixe du centre de gravité G de ABC est : $z_G = \frac{1}{3}(z_A + z_B + z_C)$

EXERCICEN°2

1) L'ensemble des points M (z) tels que $|z| = 2$ est :
   a) Une droite b) un cercle c) une demi-droite
2) L'ensemble des points M (z) tels que $|z + 4| = 1$ est :
   a) Vide b) un cercle c) une droite
3) L'ensemble des points M (z) tels que $|z - i| = |1 - z|$ est :
   a) Vide b) une droite c) un segment
4) L'ensemble des points M (z) tels que $\arg(z + i) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ est :
   a) Un demi-cercle b) une droite c) une demi droite.

EXERCICEN°3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

A, B, M et M' sont les points d'affixes respectives: 2 ; $2i$, $z \neq 2$ et $z'=\frac{iz+2}{2z-4}$

1°) On prend, dans cette question, $z=1+i$

Donner la forme algébrique ainsi que l'écriture trigonométrique de z'.

2°) a- justifier les égalités suivantes : $|2z-4|=2MA$ et $|iz+2|=MB$

b- Caractériser l'ensemble $E=\left\{M(z)\ \text{telque}\ |z'|=\frac{1}{2}\right\}$.

3°) a- Montrer que pour $z\in C-\{2\,,2i\}$, on a : $\arg(z')\equiv\frac{\pi}{2}+\arg\left(\frac{z-2i}{z-2}\right)[2\pi]$.

b- Exprimer $\arg(z')$ à l'aide de $(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}})$

c- Caractériser l'ensemble $F=\{M(z)\ \text{telque}\ z'\ \text{est imaginaire pur}\}$.

EXERCICEN°4

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u},\vec{v}$).

On considère les points A, B, C et E d'affixes respectives $z_A = 2 - i$; $z_B = -1$ et $z_C = 3i$ et $z_E = 3 - 3i$

1) a) Placer les points A, B, C et E dans P.
   b) Montrer que ABC est un triangle rectangle et isocèle en B.
   c) Déterminer l'affixe du point D pour que ABCD soit un carré.
2) Montrer que les points A, C et E sont alignés.
3) On associe à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe Z' = $\frac{iz+3}{z-2+i}$ ($z \neq 2 - i$)
   a) Déterminer Z' sous forme algébrique lorsque : $z = z_E$.
   b) Montrer que $|Z'| = \frac{CM}{AM}$
   c) Déduire l'ensemble Δ des points M d'affixes z tel que $|Z'| = 1$
4) Déterminer l'ensemble des points M d'affixes z tel que Z' soit réel.

EXERCICEN°5

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u},\vec{v}$).

1) a) Placer les points A (-2i) ; B (1+i) ; C (4+2i) et I (2) . b) Vérifier que I est le milieu de [AC]
2) a) Calculer les affixes u et u' des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$. b) Montrer que ABC est un triangle isocèle en B
3) Soit $D = S_I(B)$
   a) Calculer l'affixe du point D . b) Montrer que ABCD est un losange
4) Déterminer géométriquement les ensembles suivants :
   $\Delta = \{M(z)$ tel que $|z - 2| = |z + 2i|\}$;
   $\Delta' = \{M(z)$ tel que $|iz - i + 1| = |z - 4 - 2i|\}$
   $\zeta = \{M(z)$ tel que $|2z + 4i| = 4\}$.

EXERCICEN°6

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. *On considère les points A et B d'affixe respectives* $a = 2 + 2i\sqrt{3}$ *et* $b = -2\sqrt{3} + 2i$.

1) a) *Ecrire a et b sous forme trigonométrique.*
   b) *Représenter les points A et B.*
2) *On pose z = a + b et on désigne par N le point d'affixe z.*
   a) *Montrer que OANB est un carré.*
   b) *Déterminer le module et un argument de z.*
   c) *En déduire les valeurs exactes de* $\cos\frac{7\pi}{12}$ *et* $\sin\frac{7\pi}{12}$
3) *Soient C et D les points d'affixes respectives* $c = -2\sqrt{3} - 2i$ et $d = 4$.
   a) *Déterminer* $\left(\widehat{\overline{OB}, \overline{OC}}\right)$. *En déduire que le triangle OBC est équilatéral.*
   b) *Montrer que le quadrilatère ABCD est un trapèze.*

EXERCICEN°7

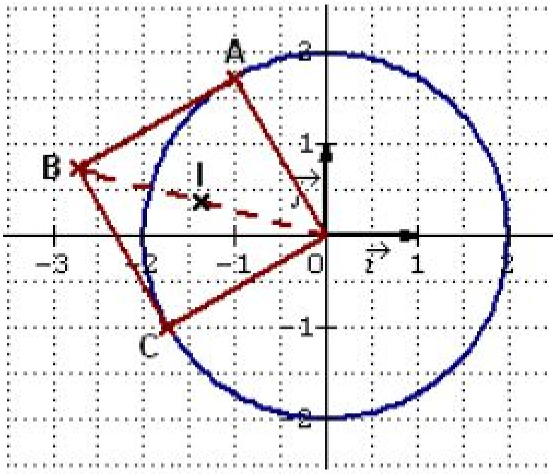
Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
On considère les points $A(1, \sqrt{3})$ *et* $C(-\sqrt{3}, 1)$.
1) a/ *Déterminer les coordonnées polaires de A et C.*

b/ *Placer les points A et C dans le repère* $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
2) *Soit B le point défini par :* $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$.

a/ *Quelle est la nature du quadrilatère OABC ? Justifier.*
b/ *Déterminer les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires de B.*
c/ *En déduire :* $\cos\frac{7\pi}{12}$ *et* $\sin\frac{7\pi}{12}$

EXERCICEN°8

Dans la figure ci-contre OABC est un carré de centre I.
1) a) Déterminer les coordonnées polaires des points A et C.
b) En déduire les coordonnées cartésiennes des points A et C.
2) Déterminer les coordonnées polaires du point I.
3) Reproduire la figure sur votre copie puis colorer :
a) En rouge l'ensemble des points M de coordonnées polaires $[2;\theta]$; $0 \le \theta \le \frac{2\pi}{3}$
b) En vert l'ensemble des points M de coordonnées polaires $\left[r; -\frac{5\pi}{6}\right]$; $0 < r \le 2$.



EXERCICEN°9

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$
(Unité graphique 2cm), on considère les points A, B et C
d'affixes respectives : $Z_A = 2$, $Z_B = 1 + i\sqrt{3}$, $Z_C = 1 - i\sqrt{3}$

Partie A

1) a - Donner la forme trigonométrique de Z_B, puis de Z_C
 b-Placer les points A, B et C
2) Déterminer la nature du quadrilatère OBAC
3) Déterminer et construire l'ensemble **E** des points M du plan d'affixes Z
 tels que $|z| = |z - 2|$

Partie B

A tout point M d'affixe Z tel que $Z \neq Z_A$, on associe le point M' d'affixe Z'
défini par : $Z' = \frac{-4}{Z-2}$
1) Déterminer et placer le point G' associé au centre de gravité G du triangle OAB

2) a - Démontrer que pour tout nombre complexe z distinct de 2 :
$$|z' - 2| = \frac{2|z|}{|z-2|}$$
b - On suppose dans cette question que M est un point quelconque de Δ (Δ est l'ensemble défini à la question 3) de la ***partie A)****.*
Démontrer que le point M' associé à M appartient à un cercle ***C*** *dont on précisera le centre et le rayon. Tracer* ***C***

EXERCICEN°10

Soit le nombre complexe $z = \frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + i}$

1°) Ecrire sous forme algébrique les nombres z ; iz ; z^2 et z^3

2°) Soit u= $\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}+\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$ montrer que u est un réel

3°) a) Vérifier que $(z+1)^2+1=z^2+2z+2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+2z+2=0$

4°) Le plan est rapporté à un repère complexe $(o,\vec{u},\vec{v})$

a) Placer les points A, B et M d'affixes respectives : $z_A=1+i$ $z_B=-1-i$

$z_M=\sqrt{3}-\sqrt{3}i$

b) Montrer que ABM est un triangle équilatéral

c) Montrer que ABO est un triangle rectangle

EXERCICEN°11

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(1+iz)^2+3=0$

2°) Le plan étant muni d'un repère complexe orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A , B , C et D d'affixes respectivement $z_A=-2$; $z_B=\sqrt{3}+i$; $z_c=\sqrt{3}-i$ *et* $z_D=1+i\sqrt{3}$

a) Placer les points A , B , C , et D

b) Déterminer la nature du triangle ABC

3°) Déterminer et construire les ensembles suivants :

a) $E=\{M(z)\in P \text{ tel que } |z-\sqrt{3}-i|=1\}$

b) $F=\{M(z)\in P \text{ tel que} |z-\sqrt{3}+i|=|z+2|\}$

4°) Ecrire z_A ,z_B et z_C sous forme trigonométrique

5°) a) Ecrire $\frac{ZB}{1+i}$ sous forme algébrique

b) Ecrire $\frac{ZB}{1+i}$ sous forme trigonométrique

c) Déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

EXERCICEN°12

On donne les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -1 + 4i$;
$z_B = 2 + 2i$ *et* $z_C = -i$

1. / *Ecrire sous forme algébriques les nombres complexes :* $z_B.z_A$ *et* $\frac{zB}{zA}$
2. / *a. Placer les points A, B et C*
   b.Montrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle en B
   c.Determiner l'affixe du point D telque ABCD soit un carré
3. / *Soit E le point d'affixe* $z_E = 1 + \sqrt{3}i$
   a.Donner le module et un argument de z_B *et* z_E
   b.Deduire le module et un argument de $z_B \times z_E$
   c.Ecrire sous forme algébriques le complexe $z_B \times z_E$
   d.Deduire $\cos\frac{7\pi}{12}$ *et* $\sin\frac{7\pi}{12}$
4. / *Déterminer et construire l'ensemble des points M(z) tel que*

$$|z + i| = |z + 1 - 4i|$$