REPUBLIQUETUNISIENNE **PROF/ MABROUKI SALAH**

MINESTRE DE L'EDUCATION ET DE LAFORMATION **SERIE N°4** **SEANCE N°4**

SECTION / SCIENCE-TECHNIQUE

Série N°4 (géométrie dans l'espace)

EXERCICEN°1

BAC 2014 PRINCIPALE (S .EXP)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère la sphère (S) d'équation $x^2+y^2+z^2-8=0$ et le plan P d'équation $x+2y+z-6=0$.

1) a) Déterminer le centre et le rayon de la sphère (S).

b) Montrer que le plan P coupe la sphère (S) suivant un cercle $(\mathcal{C})$ dont on précisera le centre et le rayon.

2) On donne les points A(2, 0, 2) et B(2, 2,0).

a) Vérifier que A appartient à la sphère (S) et n'appartient pas au plan P et que B appartient au cercle $(\mathcal{C})$.

b) Soit Q l'ensemble des points M(x, y, z) de l'espace tels que $MA = MB$.

Montrer que Q est le plan d'équation $y = z$.

c) Montrer que les plans P et Q se coupent suivant la droite Δ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 6-3\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

3) Déterminer un point C du cercle $(\mathcal{C})$ tel que ABC est un triangle équilatéral.

EXERCICEN°2

BAC 2014 CONTROLE (S .EXP)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère l'ensemble (S) des points M(x, y, z) de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2-2x+2y-1=0$.

1) Montrer que (S) est la sphère de centre le point $I(1,-1,0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

2) Soit Δ la droite passant par le point $A(0,0,3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

a) Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ.

b) Montrer que l'intersection de Δ et (S) est vide.

3) Soit B le point de coordonnées (3, 0, 0).

a) Justifier que le point B et la droite Δ déterminent un plan P.

b) Montrer que P a pour équation cartésienne $x+y+z-3=0$.

c) Prouver que le plan P est tangent à la sphère (S) et déterminer les coordonnées de leur point de contact.

EXERCICEN°3

www.salah_mabrouki@yahoo.fr

www.devoirat.net 2015

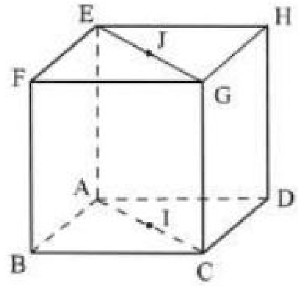
BAC 2013 PRINCIPALE (S .EXP)

Dans la figure ci - contre, ABCDEFGH est un cube d'arête 1.

Le point I est le milieu du segment $[AC]$.

Le point J est le milieu du segment $[EG]$.

L'espace est muni du repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



Répondre par vrai ou faux à chacune des propositions suivantes en justifiant la réponse.

1) $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AE}$.

2) $\left(\overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{IG}\right).\overrightarrow{IJ} = 0$.

3) La sphère de diamètre $[AC]$ est tangente au plan d'équation $z - 1 = 0$.

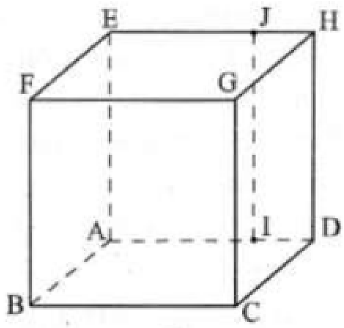
EXERCICEN°4

BAC 2013 CONTROLE (S .EXP)

Dans la figure ci-contre,

- ABCDEFGH est un cube d'arête 1.
- $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{EJ} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AD}$

On note $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{AE}$ et on munit l'espace du repère orthonormé direct $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.



1) a) Déterminer les coordonnées des points F, G, I et J.

b) Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (IJ) est $\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ z = \alpha \end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dans la suite de l'exercice α est un réel et M est un point de la droite (IJ) de coordonnées $\left(0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \alpha\right)$.

www.devoirat.net 2015

2) a) Vérifier que $\overrightarrow{AF} \wedge \overrightarrow{AM} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \alpha\vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}$ et que $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BM} = \alpha\vec{i} + \vec{k}$.

b) En déduire que les triangles AFM et BCM ont la même aire.

3) a) Montrer que $\left(\overrightarrow{AF} \wedge \overrightarrow{AM}\right).\overrightarrow{AG} = -\alpha$ et que $\left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BM}\right).\overrightarrow{BG} = 1$.

b) Montrer que

(M,A,F et G sont coplanaires) si et seulement si (M et I sont confondus).

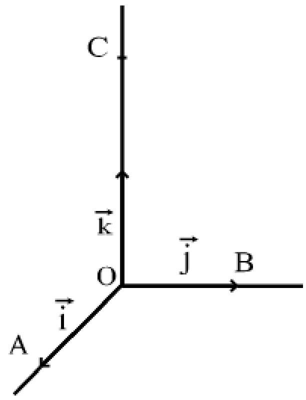
c) Déterminer les points M de la droite (IJ) pour lesquels AFMG et BCMG sont deux tétraèdres de même volume.

EXERCICEN°5

BAC 2012 PRINCIPALE (S .EXP)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ et $C(0,0,2)$.



1) Le vecteur $\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}$ est égal à

a/ $\overrightarrow{OA}$ b/ $2\overrightarrow{OA}$ c/ $-2\overrightarrow{OA}$.

2) Le réel $\frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AO}).\overrightarrow{AC}$ est égal à

a/ 0 b/ $\frac{1}{3}$ c/ 2 .

3) La droite (BC) est l'intersection des plans d'équations

a / $x = 1$ et $2y + z - 2 = 0$.

b / $x = 0$ et $y + 2z - 1 = 0$.

c / $x = 0$ et $2y + z - 2 = 0$.

4) Une équation de la sphère de centre O et tangente au plan (ABC) est

a / $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

b / $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{4}{9}$.

c / $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = \frac{4}{9}$.

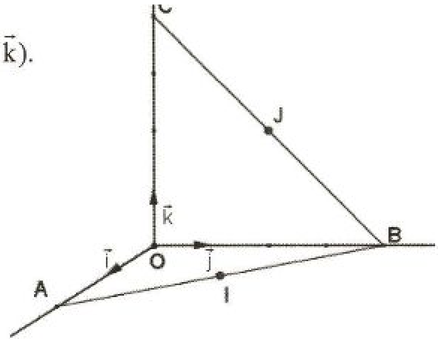
www.salah_mabrouki@yahoo.fr

www.devoirat.net 2015

EXERCICEN°6

BAC 2012 CONTROLE (S .EXP)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On considère les points $A(2,0,0)$, $B(0,4,0)$ et $C(0,0,4)$ et on désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$.



1) Déterminer les coordonnées des points I et J.

2) Soit P l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $MI = MJ$.
 a/ Montrer que P est le plan d'équation $2x-4z+3=0$.
 b/ Montrer que la droite (OC) et le plan P sont sécants en un point K que l'on précisera.

3) Soit S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que
$$x^2+y^2+z^2-\frac{3}{2}z-5=0.$$
 a/ Montrer que S est une sphère dont on déterminera le centre et le rayon.
 b/ Vérifier que les points I et J appartiennent à la sphère S.
 c/ Montrer que S est la seule sphère qui passe par les points I et J et dont le centre est un point de la droite (OC).

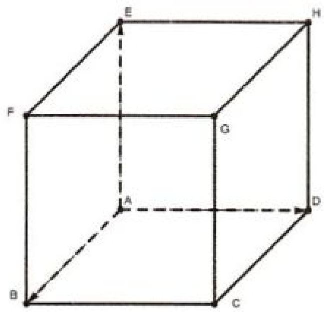
4) Déterminer l'intersection du plan P avec la sphère S.

EXERCICEN°7

BAC 2011 PRINCIPALE (S .EXP)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Dans la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube d'arête 1.
On munit l'espace du repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.



1) Le vecteur $\overrightarrow{BF}\wedge\overrightarrow{BC}$ est égal à
 a) $\overrightarrow{BG}$ b) $\overrightarrow{BD}$ c) $\overrightarrow{BA}$.

2) L'intersection des plans d'équations $x = 1$ et $y = 1$ est la droite
 a) (CH) b) (CF) c) (CG).

3) Une équation du plan (ACE) est
 a) $x+y=0$ b) $x-y=0$ c) $x-y=1$.

4) L'intersection de la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2=2$ avec le plan d'équation $z = 1$ est
 a) un cercle b) un point c) l'ensemble vide.

www.devoirat.net 2015

EXERCICEN°8

BAC 2011 CONTROLE (S .EXP)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points A(1, 0 ,0), B(0, 2, 0) et C(0, 0, 3).

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) En déduire qu'une équation du plan (ABC) est $6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

2) Soit I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [AC].

On désigne par Δ la droite passant par I et de vecteur directeur $\vec{k}$ et par Δ' la droite passant par J et de vecteur directeur $\vec{j}$.

a) Donner une représentation paramétrique de chacune des droites Δ et Δ'.

b) En déduire que Δ et Δ' sont sécantes au point $\Omega\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$

3) Soit (S) la sphère de centre Ω et passant par O.

a) Vérifier que (S) passe par les points A, B et C.

b) En déduire le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

EXERCICEN°9

BAC 2010 PRINCIPALE (S .EXP)

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points A(1 , 0 , 0), B(0 , 0 , 1) et C (1 , -1 , 1) .

1) a) Déterminer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. En déduire que les points A, B et C déterminent un plan $\mathscr{P}$.

b) Montrer qu'une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est $x + y + z - 1 = 0$.

2) Soit S l'ensemble des points M(x , y , z) de $\mathscr{E}$ tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z + 1 = 0$.

a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon r.

b) Montrer que $S \cap \mathscr{P}$ est le cercle circonscrit au triangle ABC.

3) a) Calculer le volume du tétraèdre IABC.

b) Soit α un réel et soit M un point de $\mathscr{E}$ de coordonnées $(\alpha, 0 , 2 - \alpha)$.

Montrer que, lorsque α décrit l'ensemble IR, le volume du tétraèdre MABC reste constant.

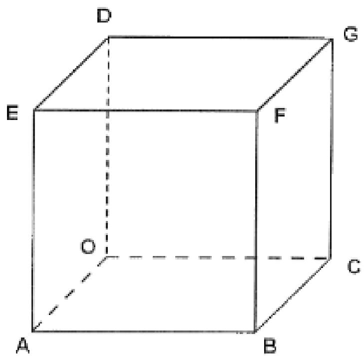
www.devoirat.net 2015

EXERCICEN°10

BAC 2010 CONTROLE (S .EXP)

Dans la figure ci-contre OABCDEFG est un cube d'arête 1.

On munit l'espace du repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}\right)$.



1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}$.

   b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ACD) est $x + y + z - 1 = 0$.

2) Soit Δ la droite passant par O et perpendiculaire au plan (ACD)

   a) Donner une représentation paramétrique de la droite Δ.

   b) Déterminer les coordonnées du point H, intersection de Δ et du plan (ACD).

3) Pour tout réel m, on désigne par S_m l'ensemble des points M (x, y, z) de l'espace tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2my - 2mz - 1 + 3m^2 = 0$

   a) Montrer que pour tout réel m, S_m est une sphère dont on précisera le centre I_m et le rayon r .

   b) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles S_m passe par le point A.

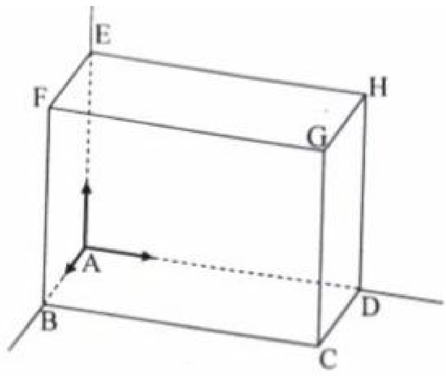
4) a) Vérifier que les centres des sphères S_0 et $S_{\frac{2}{3}}$ sont deux points de la droite Δ.

   b) Justifier que le plan (ACD) coupe les deux sphères S_0 et $S_{\frac{2}{3}}$ suivant un même cercle qu'on précisera .

www.devoirat.net 2015

EXERCICEN°11

BAC 2011 CONTROLE (S .EXP)



L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et ABCDEFGH est un parallélépipède tel que $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i}$; $\overrightarrow{AD} = 4\vec{j}$ et $\overrightarrow{AE} = 3\vec{k}$.

1) a) Vérifier que $\overrightarrow{AG} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$.
   b) Déterminer les composantes de chacun des vecteurs $\overrightarrow{EB}$; $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EB} \wedge \overrightarrow{EG}$.
   c) Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG).

2) Soit α un réel différent de 1 et M le point de coordonnées $(2\alpha, 4\alpha, 3\alpha)$.
   a) Vérifier que M décrit la droite (AG) privée du point G.
   b) Montrer que M n'appartient pas au plan (EBG).

3) Soit $\mathcal{V}$ le volume du tétraèdre MEBG.
   a) Exprimer $\mathcal{V}$ en fonction de α.
   b) Calculer le volume du tétraèdre AEBG.
   c) Pour quelles valeurs de α , $\mathcal{V}$ est-il égal au volume du parallélépipède ABCDEFGH ?

EXERCICEN°12

BAC 2011 CONTROLE (S .EXP)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère la droite Δ passant par le point $A(-3, -1, -3)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ et la droite D passant par le point $B(3, 2, 3)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

1) a) Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\det(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB})$.
   b) Justifier que les droites Δ et D sont orthogonales et non coplanaires
   c) Déterminer une équation cartésienne du plan contenant Δ et parallèle à D.

2) Soit S la sphère de centre $C(-1, 0, -1)$ et de rayon 6 et $\mathscr{P}$ le plan d'équation $2x + y + 2z + 13 = 0$.
   a) Montrer que S et $\mathscr{P}$ se coupent suivant un cercle de centre A. Déterminer le rayon de ce cercle.
   b) Montrer que la droite D est tangente à la sphère S au point B.

3) a) Calculer AB. En déduire que le point C appartient au segment [AB]
   b) Déterminer alors une droite perpendiculaire aux droites D et Δ .

www.devoirat.net 2015

EXERCICEN°13

BAC 2011 CONTROLE (S .EXP)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(2,0,1)$, $B(0,2,1)$ et $C(1,2,0)$.

1) a- Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

b- Déduire que les points A, B et C déterminent un plan P dont une équation cartésienne est : $x+y+z-3=0$.

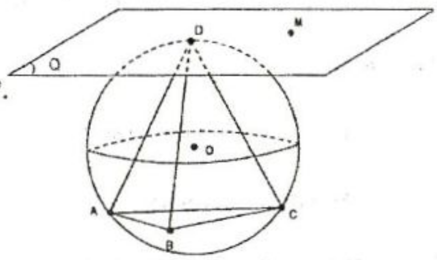
2) Soit la sphère S d'équation $x^2+y^2+z^2=5$.

a- Vérifier que A, B et C sont des points de la sphère S.

b- Déduire alors l'intersection de la sphère S avec le plan P.

3) Soit le point D de coordonnées $\left(\sqrt{\frac{5}{3}},\sqrt{\frac{5}{3}},\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$.

On désigne par Q le plan passant par D et parallèle au plan P.



a- Déterminer une équation cartésienne du plan Q.

b- Montrer que Q est tangent à la sphère S au point D.

4) Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace n'appartenant pas à P.

a- Calculer $(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM}$

b- Montrer que le volume V du tétraèdre MABC est égal à $\frac{|x+y+z-3|}{3}$.

c- En déduire que pour tout point M du plan Q ; $V=\sqrt{\frac{5}{3}}-1$.

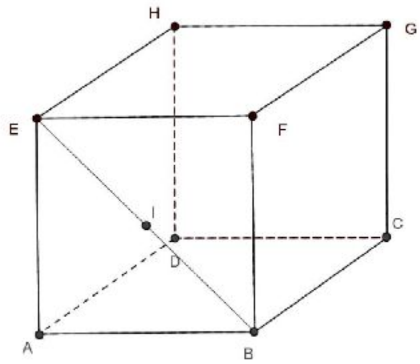
www.salah_mabrouki@yahoo.fr

www.devoirat.net 2015

EXERCICEN°14

Dans la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube d'arrête 1.

On désigne par I le milieu du segment [EB].



1) La distance du point I au plan (HGC) est égale à :

a) 1 b) 0 c) $\frac{1}{2}$

2) L'intersection de la sphère S, de centre I et de rayon $\frac{1}{2}$,

avec le plan (EFH) est :

a) Le vide b) un point c) un cercle

3) Le produit scalaire $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{GB}$ est égal à :

a) 1 b) -2 c) 0

4) Le vecteur $\overrightarrow{FD} \wedge \overrightarrow{FE}$ est égal à :

a) $\overrightarrow{DC}$ b) $\overrightarrow{BF}$ c) $\overrightarrow{AH}$

Exercice 2 (6 points)

EXERCICEN°15

www.devoirat.net 2015

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne les points A (4 , 2 , 2), B (5 ,−2 ,3) et C (1 , 1 , 1) et la droite Δ : $\begin{cases} x = 1+2\alpha \\ y = 1+\alpha \\ z = 1+2\alpha \end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{R}$

On désigne par (P) le plan passant par A et perpendiculaire à la droite Δ.

1) a) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (P) est $2x + y + 2z - 14 = 0$.

b) Vérifier que $B \in (P)$ et que $C \notin (P)$.

c) Vérifier que $C \in \Delta$ et que $A \notin \Delta$.

2) Soit le point D(3 , 2 , 3).

a) Montrer que D est le projeté orthogonal du point C sur le plan (P) .

b) Montrer que les points A , B , C et D ne sont pas coplanaires.

c) Calculer le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre ABCD.

3) a) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ et en déduire la distance d du point D à la droite (AB).

b) Vérifier que $\mathcal{V} = \dfrac{AB \times d \times CD}{6}$.

EXERCICEN°16

Exercice 1 (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points A(2 , 1, 0), B(2 ,−1 ,−2), C(0 , 1,−2) et le plan (P) : $x + y - z - 3 = 0$.

1) Vérifier que A, B et C appartiennent au plan (P).

2) Soit (S) l'ensemble des points M(x , y , z) de l'espace tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 4z + 5 = 0$

a) Montrer que (S) est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R.

b) Montrer que (P) et (S) se coupent suivant le cercle (C) circonscrit au triangle ABC.

c) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

3) Soit Δ la droite passant par I et perpendiculaire au plan (P) .

a) Montrer qu'un système paramétrique de Δ est : $\begin{cases} x = 2+\alpha \\ y = 1+\alpha \\ z = -2-\alpha \end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{R}$

b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection G du plan (P) et la droite Δ.

c) Vérifier que G est le centre de gravité du triangle ABC.

d) En déduire le centre et le rayon du cercle (C).

EXERCICEN°17

www.devoirat.net 2015

3) Soit I $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. On désigne par (S) la sphère de centre I et passant par D.

a) Montrer que la sphère(S) passe par les points A et B.

b) En déduire que le plan P coupe la sphère (S) suivant un cercle $(\mathscr{C})$.

c) Justifier que $(\mathscr{C})$ est circonscrit au triangle ABC.

4) Soit Δ la droite passant par I et perpendiculaire au plan P.

a) Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ.

b) Déterminer les coordonnées du point Ω centre du cercle $(\mathscr{C})$.

c) Soit D' le symétrique de D par rapport à Ω.

Montrer que le volume $\mathcal{V}'$ du tétraèdre D'ABC est égal à $\mathcal{V}$.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne les points A(2, 1, 1) ; B(1, 1, 0) et C(1, 0, 1).

1) a) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan que l'on notera P .

b) Vérifier que $x - y - z = 0$ est une équation cartésienne du plan P.

2) Soit le point D (2,0,0) .

a) Montrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

b) Calculer le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre ABCD.

EXERCICEN°18

www.devoirat.net 2015

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(-1, 1, 0)$, $B(1, 0, 1)$, $C(0, 2, -1)$ et $D(-1, 3, 2)$.

1) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

2) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est normal au plan (ABC).

3) Calculer le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre $DABC$.

4) Soit I, J et K les milieux respectifs de $[DA]$, $[DB]$ et $[DC]$.

   On considère le plan Q passant par I et parallèle au plan (ABC).

   a) Donner une équation cartésienne du plan Q.

   b) Vérifier que J et K appartiennent à Q.

   c) On désigne par $\mathcal{V}'$ le volume du tétraèdre $DIJK$.

      Montrer que $\mathcal{V} = 8\,\mathcal{V}'$.

EXERCICEN°19

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(0, 1, 2)$, $B(2, 0, 3)$, $C(-1, 0, 0)$ et $I(1, 2, 1)$.

1) a) Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

   b) On désigne par P le plan (ABC). Montrer qu'une équation cartésienne de P est : $x + y - z + 1 = 0$.

2) Soit la sphère (S) dont une équation cartésienne est : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z + 3 = 0$.

   a) Montrer que (S) a pour centre le point I et déterminer son rayon.

   b) Montrer que le plan P est tangent à (S) au point A.

   c) Calculer le volume du tétraèdre IABC.

3) Soit H le milieu du segment $[IA]$ et Q le plan passant par H et parallèle à P.

   a) Montrer que le plan Q et la sphère (S) sont sécants en un cercle $(\mathscr{C})$.

   b) Déterminer le centre et le rayon du cercle $(\mathscr{C})$.

EXERCICEN°20

www.salah_mabrouki@yahoo.fr

www.devoirat.net 2015