Exercice 1

On veut calculer la dérivée de la fonction f définie par $f(x)=x^2+3x-7$.

On peut écrire $f(x)=x^2+(3x-7)=u(x)+v(x)$ où $u(x)=x^2$ et $v(x)=3x-7$.

D'après le tableau des dérivées des fonctions usuelles, $u'(x)=2x$ et $v'(x)=3$.

D'après la propriété précédente $(u+v)'(x)=u'(x)+v'(x)=2x+3$ donc $f'(x)=2x+3$.

Exercice 2

On veut calculer la dérivée de la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x}(3x+2)$.

On peut écrire $f(x)=u(x)\times v(x)$ où $u(x)=\sqrt{x}$ et $v(x)=3x+2$.

D'après le tableau des dérivées des fonctions usuelles, $u'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ et $v'(x)=3$.

D'après la propriété précédente

$$(u\times v)'(x)=u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}(3x+2)+\sqrt{x}\times 3$$

soit $f'(x)=\dfrac{9}{2}\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{x}$.

On peut aussi calculer $u'\times v'=\dfrac{3}{2\sqrt{x}}=\dfrac{3\sqrt{x}}{2x}$ et observer que le résultat est différent de $f'(x)$.

Exercice 3

On veut calculer la dérivée de la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x}(3x+2)$.

On peut écrire $f(x)=u(x)\times v(x)$ où $u(x)=\sqrt{x}$ et $v(x)=3x+2$.

D'après le tableau des dérivées des fonctions usuelles, $u'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ et $v'(x)=3$.

D'après la propriété précédente

$$(u\times v)'(x)=u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}(3x+2)+\sqrt{x}\times 3$$

soit $f'(x)=\dfrac{9}{2}\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{x}$.

On peut aussi calculer $u'\times v'=\dfrac{3}{2\sqrt{x}}=\dfrac{3\sqrt{x}}{2x}$ et observer que le résultat est différent de $f'(x)$.

Exercice 4

On veut calculer la dérivée de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{3x^2+x}{4x+1}$.

Posons $u(x)=3x^2+x$ et $v(x)=4x+1$.

On se place, par exemple, sur l'intervalle $I=\left]-\dfrac{1}{4}\,;+\infty\right[$ (la fonction v ne s'annule pas sur I).

On peut écrire $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$.

D'après le tableau des dérivées des fonctions usuelles, $u'(x)=6x+1$ et $v'(x)=4$.

D'après la propriété précédente

$$\left(\frac{u}{v}\right)(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}=\frac{(6x+1)(4x+1)-(3x^2+x)\times 4}{(4x+1)^2}$$

Soit $f'(x)=\dfrac{24x^2+10x+1-12x^2-4x}{(4x+1)^2}$

Donc $f'(x)=\dfrac{12x^2+6x+1}{(4x+1)^2}$.

Exercice 5

On veut calculer la dérivée de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Posons $u(x)=\sqrt{x}$ de sorte que $f(x)=\dfrac{1}{u(x)}$.

D'après le tableau des dérivées des fonctions usuelles $u'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

D'après la propriété précédente $f'(x)=\dfrac{-u'(x)}{\left(u(x)\right)^2}=-\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$.

Finalement $f'(x)=-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$.

Exercice 1 Calculer $f'(x)$ lorsque la fonction f est définie par :

❶ $f(x)=x^2-7x+4$ ❷ $f(x)=\dfrac{-7x+1}{11}$ ❸ $f(x)=-0{,}1x^{10}-\dfrac{7}{5}x^5+\sqrt{3}$

❹ $f(x)=-\sqrt{2}x^2-7x+1$ ❺ $f(x)=9x^4-\dfrac{3}{2}$. ❻ $f(x)=-x^5+\dfrac{5x}{7}$

Exercice 2 Calculer $f'(x)$ lorsque la fonction f est définie par :

❶ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2}$ ❷ $f(x)=\dfrac{5}{x}-2x^3$ ❸ $f(x)=\dfrac{-4x^2}{\sqrt{x}}+(2\sqrt{x}+1)^2$

Exercice 3 Imaginer deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée est la fonction $x\mapsto 6x^2-2x+1$

Exercice 4 Calculer la dérivée de la fonction f d'abord en développant $f(x)$ puis en utilisant la formule donnant la dérivée d'un produit, dans les cas suivants.

❶ $f(x)=(x-3)(4-x)$

❷ $f(x)=(3x-2)(3x+2)$

❸ $f(x)=\sqrt{x}\left(x\sqrt{x}-\dfrac{\sqrt{x}}{x}\right)$

Exercice 5 Calculer $f'(x)$ lorsque la fonction f est définie par :

❶ $f(x)=\dfrac{5x+1}{3x-1}$ ❷ $f(x)=\dfrac{x}{3}-\dfrac{3}{x}$ ❸ $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2+1}$

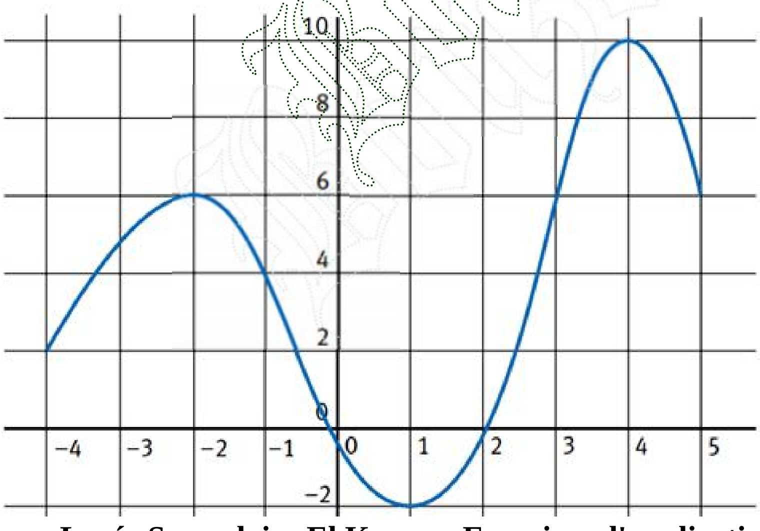
Exercice 6 Calculer $f'(x)$ lorsque la fonction f est définie par $f(x)=\dfrac{3x+6}{x+1}$

❶ à l'aide de la formule donnant la dérivée d'un quotient.

❷ en démontrant au préalable que $f(x)=3+\dfrac{3}{x+1}$.

❶ Des tangentes horizontales

La courbe suivante est celle d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-4\,;5]$.



1 Compléter les phrases suivantes :

« Lorsque la tangente à la courbe C_f est horizontale son coefficient directeur est égal à……… ».

Les abscisses des points de la courbe C_f précédente où la tangente est horizontale sont :

$x_1 = \ldots\ldots$, $x_2 = \ldots\ldots$, $x_3 = \ldots\ldots$

On a donc $f'(x_1) = \ldots\ldots$, $f'(x_2) = \ldots\ldots$, $f'(x_3) = \ldots\ldots$

2 Compléter :

« Sur l'intervalle $[-4\,;-2]$ la fonction f est …………… ».

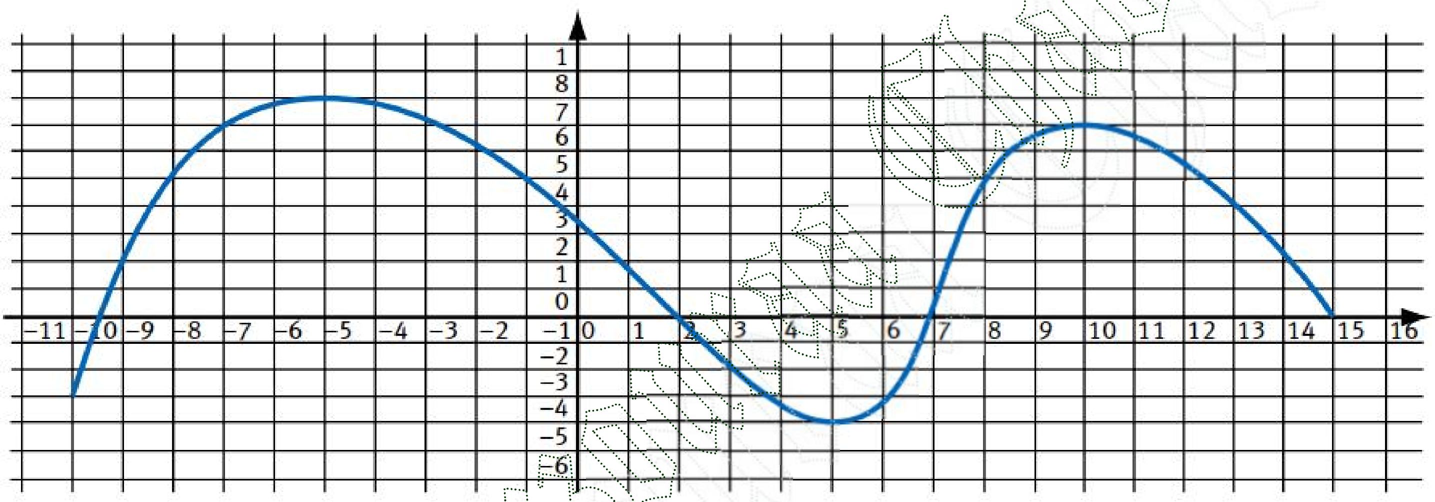
« Sur l'intervalle $[-2\,;1]$ la fonction f est …………… ».

« Sur l'intervalle $[1\,;4]$ la fonction f est …………… ».

« Sur l'intervalle $[4\,;5]$ la fonction f est …………… ».

1 Dérivée et sens de variations

La courbe suivante est celle d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-10\,;15]$.



Compléter les bornes des intervalles :

« Si $f'(x) \geq 0$ alors $x \in [\ldots\ldots ; \ldots\ldots] \cup [\ldots\ldots ; \ldots\ldots]$. »

« Si $f'(x) \leq 0$ alors $x \in [\ldots\ldots ; \ldots\ldots] \cup [\ldots\ldots ; \ldots\ldots]$. »

Tableau de variations

On considère la fonction polynôme du 2^{nd} degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+2x-3$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)=2x+2$

Comme $2x+2=0 \Leftrightarrow x=-1$, f' est une fonction affine croissante (son coefficient directeur, 2, est positif) qui s'annule en $x=-1$. Le signe de $2x+2$ en découle :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$2x+2$	$-$	0	$+$

$f'(x)<0$ sur $]-\infty\,;\,-1[$ donc f est décroissante sur $]-\infty\,;\,-1[$.

$f'(x)>0$ sur $]-1\,;+\infty[$ donc f est croissante sur $]-1\,;+\infty[$.

Dans la suite du cours, on présentera les variations de f dans un tableau de variations dans lequel on a ajouté une ligne pour le signe de la dérivée.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Signe de f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	-4	$\nearrow$	

$f(-1)=(-1)^2+2\times(-1)-3=-4$

❷ Extremum d'une fonction

❶ On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)$.

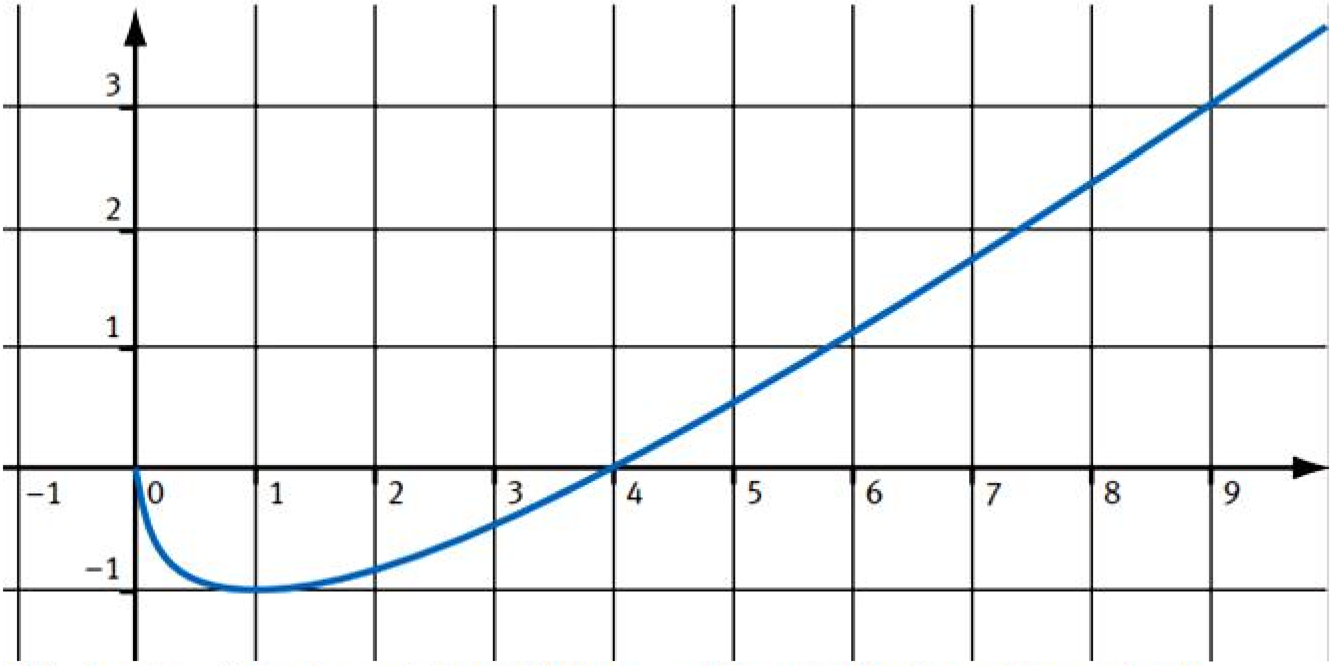
Cette fonction est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ (attention, pas en $x=0$).

Pour tout x de $]0\,;+\infty[$,

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}-2)+\frac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}(2\sqrt{x}-2)=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}.$$

Comme $f'(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1=0 \Leftrightarrow x=1$, si f admet un extremum, son abscisse sera égale à 1.

A ce stade de l'étude, on ne sait pas si f a réellement un extremum. Le tracé de la courbe va nous mettre sur la voie :



Si la fonction f admet un minimum (comme semble nous l'indiquer le graphique) au point d'abscisse 1, ceci signifiera que pour tout x de $[0\,;+\infty[$, $f(x)\geq f(1)$ autrement dit que $f(x)-f(1)\geq 0$.

On calcule donc $f(x)-f(1)=\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)-(-1)=x-2\sqrt{x}+1=(\sqrt{x}-1)^2$.

Comme un carré est toujours positif ou nul, pour tout x de $[0\,;+\infty[$, on sait que $(\sqrt{x}-1)^2\geq 0$ c'est-à-dire $f(x)-f(1)\geq 0$.

La fonction f admet donc bien un minimum en $x=1$; ce minimum est égal à -1

En résumé, nous avons démontré que si $x\geq 0$, $\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)\geq -1$.

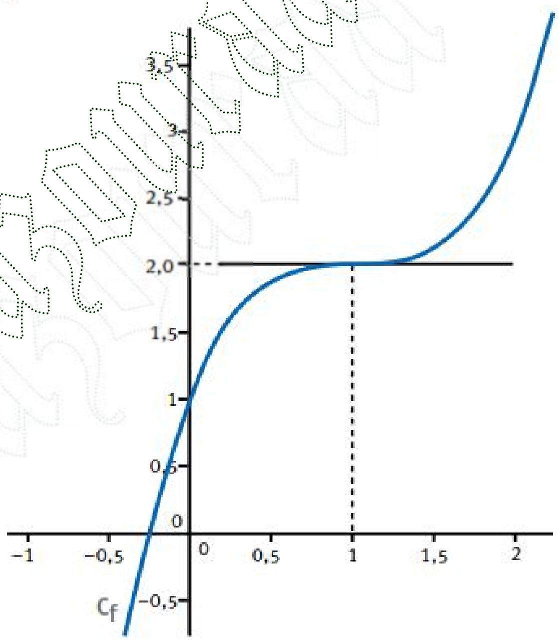
2 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x-1)^3+2$.

La courbe de la fonction f est tracée ci-contre.

On calcule $f'(x)=3(x-1)^2$, donc $f'(1)=0$.

Cependant, la fonction f n'atteint pas de maximum en $x=1$, puisque

- pour $x>1$ $(x-1)^3>0$ donc $(x-1)^3+2>0+2$ c'est-à-dire $f(x)>f(1)$.
- pour $x<1$, $(x-1)^3<0$ donc $(x-1)^3+2<0+2$ c'est-à-dire $f(x)<f(1)$.



En fait, dans une telle situation où la tangente à la courbe C_f est horizontale et la courbe C_f « traverse » cette tangente on dit que le point de coordonnées $(1\,;2)$ est un **point d'inflexion**.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $[-4\,;3]$ par $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$.

1. Calculer la dérivée f' de f.
2. Étudier le signe de $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $[-4\,;3]$.
4. Quels sont les extrema de f et en quels points sont-ils atteints
   a. sur $[-3\,;2]$?
   b. sur $[-4\,;3]$?
5. Combien de solutions dans l'intervalle $[-3\,;2]$ l'équation $f(x)=0$ possède-t-elle ?

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[-4\,;0[\cup]0\,;4]$ par $f(x)=2x+1-\dfrac{4}{x}$.

1. Calculer la dérivée f' de f.
2. Étudier le signe de $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $[-4\,;4]$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;-2\,[\cup]-2\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3x-1}{x+2}$.

1. Calculer la dérivée f' de f.
2. Étudier le signe de $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $]-\infty\,;-2[\cup]-2\,;+\infty[$.

Exercice 4

On considère les deux fonctions f et g définies par $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=\dfrac{2x^2-3x+3}{2}$.

1. Tracer les courbes de ces deux fonctions sur la calculatrice ou à l'aide de *Geogebra*.
2. a. Conjecturer les coordonnées de leur point d'intersection (on notera A, ce point).
   b. Vérifier par le calcul la conjecture.

On dit que deux courbes sont tangentes en un point P lorsque le point P est commun à ces courbes et qu'au point P les (droites) tangentes à chacune des courbes sont les mêmes.

3. Montrer qu'au point A, les deux courbes sont tangentes.