Exercice 1 :

1)Donner la forme algébrique de $z=\frac{1-2i}{\sqrt{2}+i\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{3}}{1-2i}$

2)Soient a et b deux nombres complexe non nuls ayant le même module .montrer que le complexe $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ est réel

Exercice 2 :

Soit $\theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et $z=\frac{(1-e^{i2\theta})^2}{e^{-i2\theta}(1+e^{i2\theta})}$

1)Déterminer en fonction de θle module et un argument de z

2)Calculer θ pour que z soit réel

Exercice 3 : (extrait du Bac Sc 2011)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct .On considère les points A et B d'affixes respectives $a=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$

1)a)Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres a et b

b)Vérifier que $b^2=a$

2)Soit C le point d'affixe $c=a+b$

a)Placer les points A , B et C

b)Vérifier que $c=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

Exercice 4 :

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct$(o;\vec{u};\vec{v})$. On donne les points A et B d'affixes respectives $z_A=-1+i\sqrt{3}$ et $z_B=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

1)Mettre sous forme exponentielle les complexes z_A ; z_b et $z=\frac{z_A}{z_B}$

2)En déduire $cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

3)On considère les points C et D d'affixes respectives

$Z_1=z_A+z_B$ et $Z_2=z_A-z_B$

a)Placer les points A , B , C et D

b)Quel est la nature du quadrilatère OACB

c)En déduire le module et un argument de Z_1 et Z_2

d)Retrouver ce résultat par le calcul

Exercice 5 : (Bac 2005)

Dans le plan complexe $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct$(o;\vec{u};\vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A=1+i\,Z$ et $z_B=1-i\,Z$; avec $Z=x+i\,y$; $(x\,,y)\in\mathbb{R}^2$. On pose $Z=e^{i\alpha}$ où $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

1)a)Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$,on a $1+e^{ix}=2cos\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}$ et

$1-e^{ix}=-2\,i\,sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}$

b)En déduire l'écriture exponentielle de : $Z_1=1+cos\alpha+i\,sin\alpha$;

$Z_2=1-cos\alpha-i\,sin\alpha$; z_A ; z_B ; $i+Z$ et $i-Z$

2)a)Montrer que $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux si et seulement si $|Z|=1$

b)Montrer que les points O , A et B sont alignés si et seulement si $x=0$

c)Déterminer le complexe Z pour que OAB soit un triangle isocèle rectangle en O

3)a)Montrer que A et B sont symétriques par rapport à un point fixe à préciser

b)Déterminer l'ensemble des points A$(1+iZ)$ lorsque α varie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

c)En déduire l'ensemble des points B$(1-iZ)$ lorsque α décrit $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

Exercices : Nombres complexes