❖ Exercice 1 :

1) La forme algébrique du nombre complexe $\sqrt{3}\cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$ est

a) $\frac{3-i\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{3+i\sqrt{3}}{2}$

2) Un argument du nombre complexe $(1-i\sqrt{3})i$ est

a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{-\pi}{3}$

3) Le module du nombre complexe $1+e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est égal à

a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) 2

4) L'ensemble des points M d'affixe z tels que $(z-i)(\overline{z}+i)=1$ est

a) un singleton. b) une droite. c) un cercle.

❖ Exercice 2 :

Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, unité graphique 4 cm, on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives $z_A = 2i$, $z_B = i$, $z_C = -1 + i$, $z_D = 1 + i$.
On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

1. Soit la fonction f de $\mathscr{P}-\{B\}$ dans $\mathscr{P}$ qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z'=i\left(\frac{z-2i}{z-i}\right)$.

a. Développer $(z+1-i)(z-1-i)$.

b. Chercher les points M vérifiant $f(M) = M$ et exprimer leurs affixes sous forme algébrique puis trigonométrique.

2. *a.* Montrer que, pour tout z différent de i, $|z'|=\frac{AM}{BM}$ et que, pour tout z différent de i et de 2i,

$$\arg(z')=(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM})+\frac{\pi}{2} \quad \text{(modulo } 2\pi).$$

b. Déterminer et construire l'ensemble $(\mathscr{E})$ des points M d'affixe z tels que $|z'|=1$.

c. Déterminer et construire l'ensemble $(\mathscr{F})$ des points M d'affixe z tels que $\arg(z')=\frac{\pi}{2}$ (mod 2π).

3. *a.* Démontrer que $z'-i=\frac{1}{z-i}$ et en déduire que $|z'-i|\times|z-i|=1$, pour tout complexe z différent de i.

b. Soit M un point du cercle $\mathscr{C}$ de centre B et de rayon $\frac{1}{2}$. Prouver que le point M' d'affixe z' appartient à un cercle de centre B et de rayon à déterminer.

❖ Exercice 3 :

Soit $\theta \in [0; 2\pi[$

1./ a. Vérifier que $(e^{i\theta}-i)^2 = -1 + e^{2i\theta} - 2ie^{i\theta}$

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-2iz+2ie^{i\theta} - e^{2i\theta} = 0$

2./On désigne par M_1 et M_2les points d'affixes respectives $e^{i\theta}$ et $2i - e^{i\theta}$ dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O ;\vec{u},\vec{v})$.

a. Déterminer et construire l'ensemble C_1 décrit par M_1lorsque θ varie dans $[0; 2\pi[$

b. Calculer l'affixe du milieu I du segment $[M_1M_2]$.

c. Déduire l'ensemble C_2 décrit par M_2 lorsque θ varie dans $[0; 2\pi[$. Construire C_2

3./a. Montrer que $M_1M_2{}^2 = 8(1- \sin\theta)$

b. Déduire la valeur de θ pour laquelle M_1M_2 est maximale.

❖ Exercice 4 :

Pour tout nombre complexe z ,on définit : $P(z) = z^3 + 2(\sqrt{2} - 1)z^2 + 4(1 - \sqrt{2})z - 8$

1. a. Calculer P(2)

b. Déterminer le nombre complexe b tel que : $P(z) = (z-2)(z^2 + bz + 4)$.

2. a. Résoudre dans C l'équation (E) : P(z) = 0.On appelle z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E)

autre que 2 ,$z_1$ayant la partie imaginaire positive.

b. Vérifier que $z_1 + z_2 = -2\sqrt{2}$

c. Donner la forme exponentielle de z_1 et z_2

3. a. Placer dans le plan, muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u} , \vec{v})$.(unité graphique 2cm),

les points A , B et C d'affixes respectives 2 ; z_1 et z_2 et le point I milieu de [AB]

b. Démontrer que le triangle OAB est isocèle. en déduire une mesure de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{OI})$

c. Donner la forme algébrique de l'affixe z_I de I , puis le module de z_I

d. Déduire des résultats précédents les valeurs exactes de $\cos(\frac{3\pi}{8})$ et $\sin(\frac{3\pi}{8})$

❖ Exercice 5 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O ;U,V) .

I°/ Soit θ un réel de $]0 ;\pi[$ et (E) l'équation dans C définie par : $z^3 - iz^2 + 4e^{2i\theta}z - 4ie^{2i\theta} = 0$

1.) Vérifier que z_0 =i es tune solution de l'équation (E)

2.) Trouver alors les deux autres solutions z_1 et z_2 de (E)

3.) On prend $\theta = \frac{\pi}{2}$.Déterminer alors z_1 et z_2

II°/ On considère les points A d'affixe 2 et B d'affixe -2.

Pour tout point M différent de A, on associe le point M' d'affixe z' donnée par $z' = \frac{2z-4}{\bar{z}-2}$.

1.) Démontrer que $|z'| = 2$ puis interpréter géométriquement ce résultat.

2.) Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z ($z\neq2$) tels que M'=B.

3.) Soit M un point n'apparentant pas à E et distinct de A et B.

Démontrer que $\frac{z-2}{z'+2}$ est réel puis interpréter géométriquement ce résultat.