(Anciens sujets Bac 4ième Sciences).

Exercice N°1 Session principale 2014

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{x}}$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.

2) a) Montrer que pour tout réel x, $f'(x)=-\dfrac{(2+e^{-x})}{(1+e^{x})^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Justifier que la tangente (T) à la courbe C_f au point d'abscisse 0 a pour équation $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{2}$.

b) Utiliser le tableau de signe ci-contre pour préciser la position relative de C_f et (T).

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)+\frac{3}{4}$		$-$	0	$+$	

c) Tracer (T) et C_f.

4) Soit λ un réel strictement positif. On désigne par A_λ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f, les axes du repère et la droite d'équation $x=\lambda$.

a) Vérifier que, pour tout réel x, $f(x)=e^{-x}-\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

b) Montrer que $A_\lambda=-e^{-\lambda}+\ln(1+e^{-\lambda})+1-\ln 2$.

c) Calculer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A_\lambda$.

Exercice N°2 Session de contrôle 2014

Soit f et g les fonctions définies sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :

$$f(x)=\ln x-\frac{x-1}{x} \quad \text{et} \quad g(x)=\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x.$$

On désigne par C_f et C_g les courbes de f et g dans un même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement ces résultats.

b) Justifier que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$.

2) a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que :

pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3) On donne, ci-contre, le tableau de variation de la fonction $g-f$.

x	0		1		$+\infty$
$g-f$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

a) Préciser la position relative des courbes C_f et C_g.

b) Soit a un réel de $]1,+\infty[$, M le point de la courbe C_f d'abscisse a et N le point de la courbe C_g de même abscisse a.

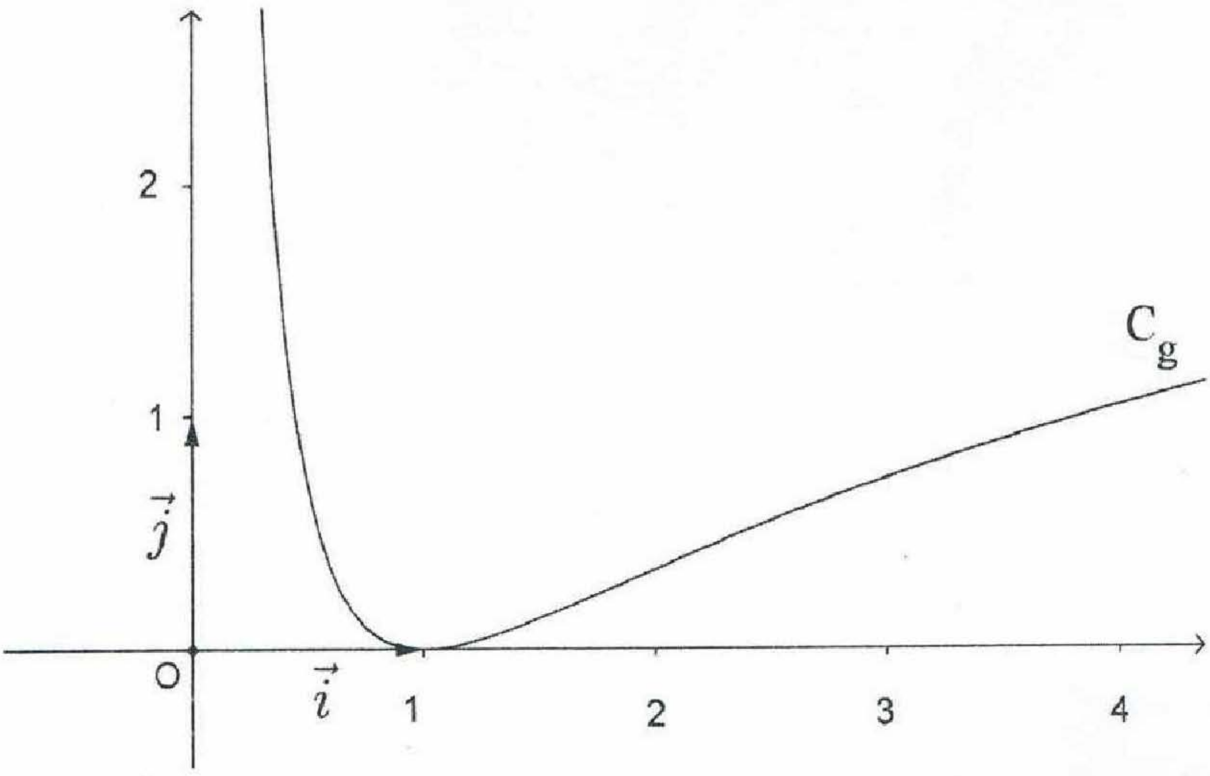
Justifier que $MN < 1$.

4) Dans **l'annexe** ci-jointe, on a tracé la courbe C_g.

a) Tracer la courbe C_f.

b) Vérifier que pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $g(x)-f(x)=1-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}$.

c) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C_f, C_g et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.



__Exercice N°3__ Session principale 2013

Dans l'annexe ci-jointe $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé et C_f est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[3, +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 9}\right)$.

Soit E la partie du plan limitée par la courbe C_f et les droites d'équations $x = 3$, $x = 5$ et $y = \ln 3$. On désigne par A l'aire (en unité d'aire) de E.

1) Hachurer E.

2) a) Vérifier que $f(5) = 2\ln 3$.

b) Soit M et N les points de la courbe C_f d'abscisses respectives 3 et 5 et P et Q les points de coordonnées respectives $(5, \ln 3)$ et $(3, 2\ln 3)$.

Placer, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les points M, N, P et Q.

c) Calculer l'aire du rectangle MPNQ et l'aire du triangle MPN.

d) En déduire que $\ln 3 \leq A \leq 2\ln 3$.

3) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) En utilisant le graphique, justifier que f réalise une bijection de $[3, +\infty[$ sur l'intervalle $[\ln 3, +\infty[$.

4) Soit g la fonction réciproque de la fonction f et C_g sa courbre représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Tracer la courbe C_g.

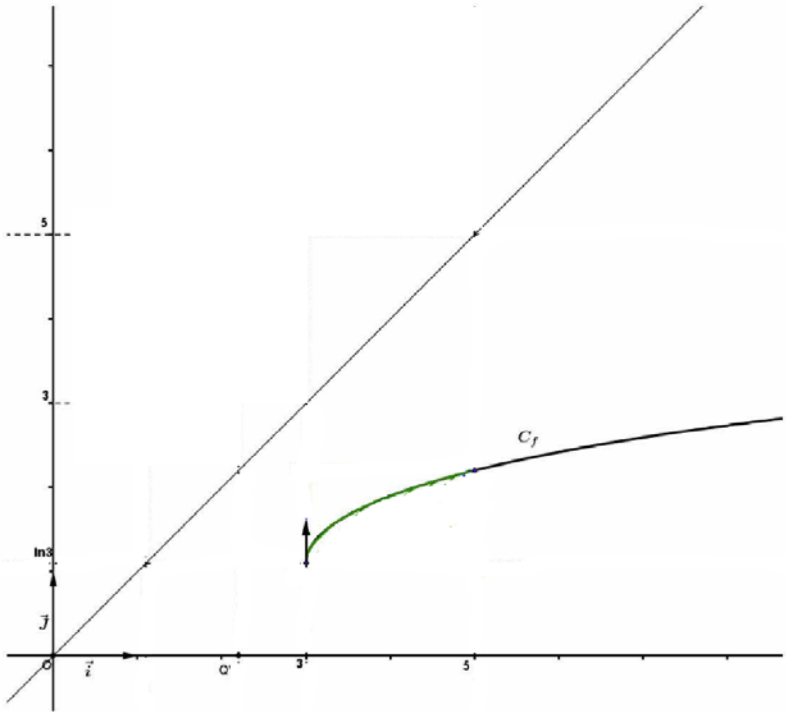
5) Soit E' la partie du plan limitée par la courbe C_g et les droites d'équations $x = \ln 3$, $x = 2\ln 3$ et $y = 5$. On désigne par A' l'aire (en unité d'aire) de E'.

a) Hachurer E'.

b) Montrer que $A' = 5\ln 3 - \int_{\ln 3}^{2\ln 3} g(x)dx$.

6) a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[\ln 3, +\infty[$, $g(x) = \dfrac{e^x + 9e^{-x}}{2}$.

b) Calculer $\int_{\ln 3}^{2\ln 3} g(x)dx$ et en déduire la valeur de A.



Exercice N°4 Session de contrôle

Exercice 4 (6 points)

Dans l'annexe ci - jointe $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan,
C_f et C_g sont les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$ et $g(x) = \ln x - \frac{1}{x}$.

C_f coupe l'axe des abscisses au point $A(\alpha, 0)$.

C_g coupe l'axe des abscisses au point $B(\beta, 0)$.

1) a) Donner le signe de $f(x)$ et celui de $g(x)$ sur $]0,+\infty[$.

b) Justifier que $e^{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$ et que $\ln\beta = \frac{1}{\beta}$.

2) Soit h la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x) = e^x - \ln x$ et C_h sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x)$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x} = +\infty$.

c) Vérifier que $h(\alpha) = -g(\alpha)$

d) Dresser le tableau de variation de la fonction h.

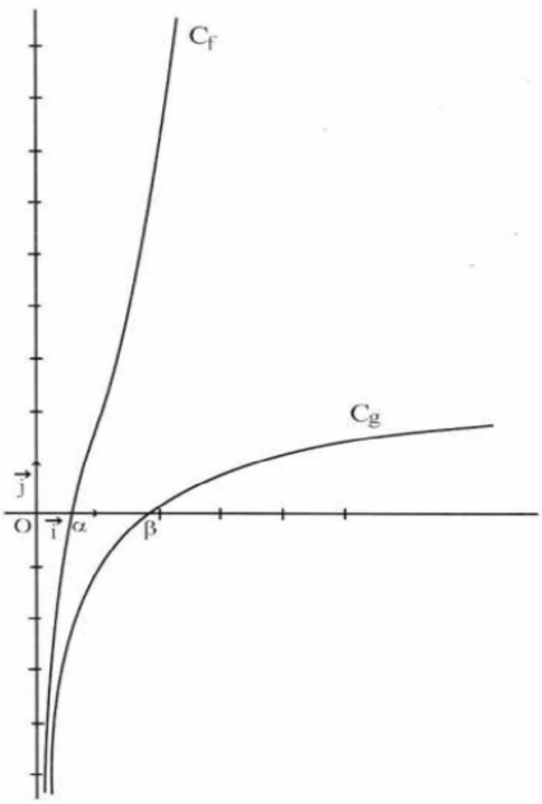
3) a) Vérifier que pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $f(x) - h(x) = g(x)$.

b) Etudier la position relative des courbes C_f et C_h.

c) Construire C_h dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4) Soit $a > 0$. La droite Δ d'équation $x = a$ coupe les courbes C_f et C_g respectivement en M et N.

Montrer que la distance MN est minimale pour $a = \alpha$.



Exercice N°5 Session principale 2012

Dans l'annexe ci-jointe $(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.

C_f est la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x)=-\frac{x^2+x\ln x+x}{(x+1)^2} \quad \text{pour } x>0 \text{ et } f(0)=0.$$

Le réel α est l'abscisse du point d'intersection de la courbe C_f avec l'axe des abscisses autre que le point O.

1) a/ Par lecture graphique, donner le signe de $f(x)$.

b/ Montrer que $\ln\alpha=-(\alpha+1)$.

2) On considère la fonction g définie sur $[\alpha,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{x\ln x}{x+1}+1$

et on désigne par C_g la courbe représentative de g dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=0$.

3) a/ Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[\alpha,+\infty[$, $g'(x)=-\dfrac{f(x)}{x}$.

b/ Dresser le tableau de variation de g.

4) a/ Montrer que $g(\alpha)=1-\alpha$.

b/ Construire alors, sur l'annexe, le point de la courbe C_g d'abscisse α.

c/ Tracer la courbe C_g.

5) On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire (en unité d'aire) de la partie du plan limitée par les courbes C_g , C_f et les droites d'équations $x=\alpha$ et $x=1$.

a) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que

$$\int_\alpha^1 f(x)dx=-\left[xg(x)\right]_\alpha^1+\int_\alpha^1 g(x)dx.$$

b/ En déduire que $\mathcal{A}=\alpha^2-\alpha+1$.