Exercice 1

Le personnel d'un grand hôpital est réparti en trois catégories : les médecins, les soignants (non médecins) et le personnel AT (administratif ou technique). 12% des personnels sont des médecins et 71% sont des soignants. 67% des médecins sont des hommes et 92% des soignants sont des femmes.

On donnera une valeur approchée de tous les résultats à 10^{-4} près.

1. On interroge au hasard un membre du personnel de cet hôpital.

On note les événements:

M: « la personne interrogée est médecin » ; S: « la personne interrogée est soignant» ;A: « la personne interrogée est un personnel AT » ; F: « la personne interrogée est une femme » ; H: « la personne interrogée est un homme » ;

a) Quelle est la probabilité d'interroger une femme soignante ?

b) Quelle est la probabilité d'interroger une femme médecin ?

2. On sait que 80% du personnel est féminin.

a) Calculer la probabilité d'interroger une femme AT.

b) Réaliser un arbre pondéré et indiquer les probabilités sur les branches.

c) Déterminer la probabilité d'interroger une femme sachant qu'elle fait partie du personnel AT.

Exercice 2

On lance plusieurs fois une pièce de monnaie équilibré.

1. Dans cette question, on lance deux fois la pièce.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir deux piles ?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir un pile et un face sachant que le premier lancer a donné un pile ?

c) On considère les événements : A :« on a obtenu un pile et un face »; B : « on a obtenu au plus un pile ».

Calculer la probabilité des événements A, B et $A \cap B$.

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Dans cette question, on lance trois fois la pièce ; on note X = le nombre de piles .

a) Préciser l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.

b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

c) Déterminer l'espérance mathématique de X.

Exercice 3

On considère une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $f'(x) = f(x)$.

1. Préciser la solution de cette équation différentielle telle que $f(0) = 1$.
2. Montrer que pour tout x réel, $f(x) \geq x + 1$.
3. Montrer que pour tout x réel, $f(x) > 0$.
4. On considère la courbe C représentative de f et M un point de C d'abscisse a .

a) Déterminer une équation de la tangente à C au point M.

b) Soit T le point d'intersection de la tangente avec l'axe des abscisses et H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses. Préciser les coordonnées des points H et T.

c) Montrer que la distance TH = 1.

Exercice 4

On considère deux nombres premiers p et q supérieurs ou égaux à 11.

Démontrer que $p^2 - 1$ et $q^2 - 1$ sont divisibles par 8.

Démontrer que p^2 et q^2 sont congrus à 1 modulo 3.

Démontrer que $p^6 - q^6$ est divisible par 7.

Démontrer que $p^6 - q^6$ est divisible par $p^2 - q^2$, et trouver la factorisation.

Démontrer que $A = (p^2 - 1)(q^2 - 1)(p^6 - q^6)$ est divisible par 5.

Déduire des questions précédentes que A est divisible par 2903040.

Exercice 5

1. Ecrire les nombres 1^3 , 2^3 , 3^3 comme des différences de deux carrés.
2. Le nombre a est un entier naturel non nul.

a) Montrer qu'il existe deux entiers naturels m et p tels que $m + p = a^2$ et $m - p = a$.

b) En déduire a^3 en fonction de m et p.

3. Montrer que le cube de tout entier naturel peut s'écrire comme différence de deux carrés.
4. Ecrire alors 11^3 comme diférence de deux carrés.
5. Démontrer que tout entier naturel impair peut s'écrire comme différence de deux carrés.

Exercice 6

On considère l'ensemble $A_7 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Pour tout élément a de A_7, écrire dans le tableau ci-contre l'unique élément y de A_7 tel que $ay \equiv 1\ (7)$.

Pour x entier relatif, démontrer que l'équation $3x \equiv 5\ (7)$ équivaut à $x \equiv 4\ (7)$.

Si a est un élément de A_7, montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $ax \equiv 0\ (7)$ sont les multiples de 7.

Dans toute cette question, p est un nombre premier supérieur ou égal à 3.

On considère l'ensemble $A_p = \{1; 2; ...; p-1\}$ de entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p.

Soit a un élément de A_p.

Vérifier que a^{p-2} est solution de l'équation $ax \equiv 1\ (p)$.

On note r le reste de la division euclidienne de a^{p-2} par p.

Démontrer que r est l'unique solution x dans A_p tel que $ax \equiv 1\ (p)$.

Soient x et y deux entiers relatifs. Démontrer que $xy \equiv 0\ (p)$ si et seulement si x est un multiple de p ou y est un multiple de p.

Résoudre dans A_{31} les équations : $2x \equiv 1\ (31)$ et $3x \equiv 1\ (31)$.

A l'aide des résultats précédents, résoudre dans l'équation $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0\ (31)$

Exercice 7

1. Soient a et b deux entiers vérifiant $a \equiv 4\ (5)$ et $b \equiv 3\ (5)$.

Déterminer le reste de la division euclidienne de $7a^2 - 4b^2 + 2ab$ par 5.

2. Déterminer tous les entiers relatifs n tels que $n^2 - 3n + 6$ est divisible par 5.

Exercice 8

Montrer que pour tout entier naturel n, $10^n(9n - 1)$ a pour reste 8 dans la division euclidienne par 9.

Exercice 9

On considère un entier naturel n.

1. Démontrer que n^2 est congru soit à 0, soit à 1, soit à 4 modulo 8.
2. Démontrer que n^2 est divisible par 8 si et seulement si n est divisible par 4.
3. En déduire que, pour tout entier naturel a et b, le nombre $a^2 + b^2 + 2$ n'est pas divisible par 8.

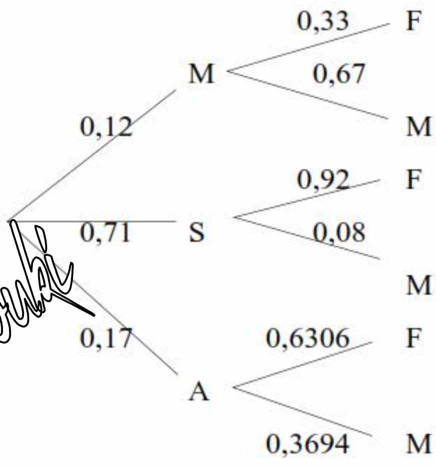
Exercice 1

1. a) La probabilité d'interroger une femme soignante est
2. $p(S\cap F) = 0{,}71\times0{,}92 = 0{,}6532$.

b) La probabilité d'interroger une femme médecin est
$p(M\cap F) = 0{,}12\times0{,}33 = 0{,}0396$.

2. a) En utilisant le formule des probabilités totales, la probabilité d'interroger une femme AT est
$p(A\cap F) = p(F) - (p(S\cap F) + p(M\cap F)) = 0{,}8 - 0{,}6532 - 0{,}0396 = 0{,}1072$.

b) L' arbre pondéré : On détermine $p(A) = 1 - p(M) - p(S) = 0{,}17$...



c) La probabilité d'interroger une femme sachant qu'elle fait partie du personnel AT est $p_A(F) = \dfrac{p(A\cap F)}{p(A)} = \dfrac{0{,}1072}{0{,}17} = 0{,}6306$.

Exercice 2

On lance plusieurs fois une pièce de monnaie équilibré.

1. a) La probabilité d'obtenir deux piles est $0{,}5\times0{,}5 = 0{,}25$.

b) La probabilité d'obtenir un pile et un face sachant que le premier lancer a donné un pile est la probabilité d'obtenir un pile au premier lancer et un face au deuxième, soit $0{,}5\times0{,}5 = 0{,}25$.

c) On considère les événements : A :« on a obtenu un pile et un face »; B : « on a obtenu au plus un pile ».
$p(A) = 0{,}25 + 0{,}25 = 0{,}5$; $p(B)$ = p(obtenir un pile) + p(n'obtenir aucun pile) $= 0{,}5 + 0{,}25 = 0{,}75$; $p(A\cap B)$ = p(obtenir un pile et un face) $= p(A) = 0{,}5$. On a $p(A\cap B) = p(A) \neq p(A)p(B)$, donc les événements A et B ne sont pas indépendants.

2. a) L'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X est $\{0, 1, 2, 3\}$.

b) $p(X = 0)$ = p(obtenir trois faces) $= 0{,}125$; $p(X = 1) = p(\, PFF \cup FPF \cup FFP\,) = 0{,}125\times 3 = 0{,}375$;
$p(X = 2) = p(\, PPF \cup FPP \cup PFP\,) = 0{,}125\times 3 = 0{,}375$; $p(X = 3) = p(\, FFF\,) = 0{,}125$.

c) L'espérance mathématique de X est $E(X) = 0 \times0{,}125 + 1 \times0{,}375 + 2 \times0{,}375 + 3 \times0{,}125 = 1{,}5$.

Exercice 3

1. La solution de cette équation différentielle telle que $f(0) = 1$ est la fonction exponentielle.

2. On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = f(x) - x - 1$.
Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions qui le sont ; sa dérivée est $g'(x) = f'(x) - 1 = f(x) - 1$.
Comme $f(0) = 1$, $g'(0) = 1$ et que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors $g'(x)$ est positif sur $[1 ; +\infty[$ et négatif sur $]-\infty ; 1]$. Donc la fonction g est croissante sur $[1 ; +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty ; 1]$, elle admet donc un minimum pour $x = 0$ qui est
$g(0) = f(0) - 1 = 0$; ainsi, la fonction g est positive sur $\mathbb{R}$ et donc pour tout x réel, $f(x) \geq x + 1$.

3. On utilise la propriété : $f(a + b) = f(a)f(b)$, et en prenant $a = x/2$ et $b = x/2$, il vient $f(x) = [f(x/2)]^2 > 0$ puisque $f(x)$ ne s'annule pas.

4. On considère la courbe C représentative de f et M un point de C d'abscisse a .

a) Une équation de la tangente à C au point M d'abscisse a est $y = f'(a)(x - a) + f(a) = e^a(x - a) + e^a$.

b) Les coordonnées de H sont $H(a ; 0)$ et celles de T vérifient : $y = e^a(x - a) + e^a$ et $y = 0$, d'où $e^a(x - a) + e^a = 0$ et on trouve $x = a - 1$.

c) La distance $TH = | x_H - x_T | = | a - (a - 1)| = 1$.

Exercice 4

1. Les nombres p et q sont des nombres premiers supérieurs à 11, donc sont impairs; ainsi, il existe deux entiers naturels k et k' tels que $p = 2k + 1$ et $q = 2k' + 1$. Ainsi $p^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1)$. Le produit de deux entiers consécutifs étant toujours pair, $k(k + 1) = 2r$ avec r entier naturel, et $p^2 - 1 = 8r$, donc $p^2 - 1$ est divisible par 8. De même pour $q^2 - 1$.

2. Les nombres p et q sont des nombres premiers supérieurs à 11, ils ne sont pas multiples de 3, donc $p \equiv 1\ (3)$, ou $p \equiv 2\ (3)$; soit $p^2 \equiv 1\ (3)$, ou $p^2 \equiv 4 \equiv 1\ (3)$. De même pour q. Donc p^2 et q^2 sont congrus à 1 modulo 3.

3. Les nombres p et q sont des nombres premiers supérieurs à 11, donc ils sont premiers avec 7. D'après le petit théorème de Fermat : $p^6 \equiv 1\ (7)$, et $q^6 \equiv 1\ (7)$, donc $p^6 - q^6 \equiv 0\ (7)$, et $p^6 - q^6$ est divisible par 7.

4. On sait que pour tous réels a et b, $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;
donc $p^6 - q^6 = \left(p^2\right)^3 - \left(q^2\right)^3 = (p^2 - q^2)(p^4 + p^2q^2 + q^4)$, donc $p^6 - q^6$ est divisible par $p^2 - q^2$

5. Les nombres p et q sont des nombres premiers supérieurs à 11, donc ils sont premiers avec 5.

Congruences de $p^2 - 1$ modulo 5:

p	1	2	3	4
p^2	1	4	4	1
p^2-1	0	3	3	0

Donc, si p ou q est congru à 1 ou 4 modulo 5, alors $(p^2 - 1)$ ou $(q^2 - 1)$ est divisible par 5. Sinon, p et q sont congrus à 2 ou 3 modulo 5, alors p^2 et q^2 sont congrus à 3 modulo 5, donc $p^2 - q^2$ est divisible par 5.
Donc, dans tous les cas, $A = (p^2 - 1)(q^2 - 1)(p^6 - q^6)$ est divisible par 5.
6. La décomposition en produit de facteurs premiers de 2903040 est $2^{10}\times3^4\times5\times7$.
Divisibilité par 2^{10} : On a vu que $p^2 - 1 = 8r$, et $q^2 - 1 = 8s$, avec r *et* s dans $\mathbb{N}$.
D'où $A = (p^2 - 1)(q^2 - 1)(p^2 - q^2)(p^4 + p^2q^2 + q^4) = 8r8s(8r - 8s)(p^4 + p^2q^2 + q^4) = 8^3rs(r - s)(p^4 + p^2q^2 + q^4) = 2^9rs(r - s)(p^4 + p^2q^2 + q^4)$. On raisonne sur r et s : si l'un des deux est pair, alors rs est pair; s'ils ont tous les deux impairs, alors $r - s$ est pair. Donc, dans tous les cas, $rs(r - s)$ est pair et $rs(r - s) = 2m$. Ainsi A est divisible par 2^{10}.
Divisibilité par 3^4 : p^2 et q^2 sont congrus à 1 modulo 3, donc $(p^2 - 1)(q^2 - 1)$ est divisible par 3^2 ; d'après le petit théorème de Fermat : $p^2 \equiv 1\ (3)$, donc $p^4 \equiv p^2 \equiv 1\ (3)$, et $q^4 \equiv q^2 \equiv 1\ (3)$,
donc $p^4 + p^2q^2 + q^4$ est divisible par 3 ainsi que $p^2 - q^2$. Donc, $p^6 - q^6$ est divisible par 3^2. Ainsi A est divisible par 3^4.
On sait aussi que A est divisible par 5 et par 7.
Ainsi A est divisible par $2^{10}\times3^4\times5\times7 = 2903040$.

Exercice 5

1. On peut écrire les nombres $1^3 = 1^2 - 0^2$; $2^3 = 3^2 - 1^2$; $3^3 = 6^2 - 3^2$.

2. a) On cherche deux entiers naturels m et p tels que $\begin{cases} m+p=a^2 \\ m-p=a \end{cases}$. On additionne les deux équations, et on trouve $2m = a^2 + a$, soit $m = \dfrac{a^2+a}{2} = \dfrac{a(a+1)}{2}$. Ce nombre est un entier, car le produit de deux entiers consécutifs $a(a + 1)$ est un nombre pair, donc divisible par 2. On soustrait les deux équations, et on trouve $2p = a^2 - a$, soit $p = \dfrac{a^2-a}{2} = \dfrac{a(a-1)}{2}$. Ce nombre est aussi un entier pour les mêmes raisons..
b) Ainsi, $a^3 = a^2\times a = (m + p)(m - p) = m^2 - p^2$.
3. On vient de montrer que, pour tout entier naturel a non nul, le cube de a peut s'écrire comme différence de deux carrés $m^2 - p^2$ avec $m = \dfrac{a(a+1)}{2}$ et $p = \dfrac{a(a-1)}{2}$. De plus, si $a = 0$, alors $0^3 = 1^2 - 1^2$. Ainsi, le cube de tout entier naturel peut s'écrire comme différence de deux carrés.
4. Ainsi si $a = 11$, $m = 66$ et $p = 55$, et $11^3 = 66^2 - 55^2$; vérification : $11^3 = 1331$; $66^2 - 55^2 = 4356 - 3025 = 1331$.
5. Soit a un entier naturel impair; il existe un entier naturel k tel que $a = 2k + 1 = k^2 + 2k + 1 - k^2 = (k + 1)^2 - k^2$.
Donc tout entier naturel impair peut s'écrire comme différence de deux carrés.

Exercice 6

1. a) Les six plus petits carrés parfaits ayant 6 comme chiffre des unités sont 16, 36, 196, 256, 576, 676.
b) La conjecture que l'on peut faire sur leur chiffre des dizaines est qu'il est impair.
c) On s'aperçoit que les nombres dont le carré a comme chiffres des unités 6 sont les nombres dont le chiffre des unités est 4 ou 6. Effectivement, soit a un entier relatif.

Bouzouraa Chaouki

Chiffre des unités de a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre des unités de a^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Ainsi, si a a pour chiffre des unités 4, $a = 10k + 4$, et $a^2 = 100k^2 + 80k + 16 = 100k^2 + 10\times8k + 16$. Le chiffre des dizaines de ce nombre est le chiffre des unités de $8k + 1$ qui est impair.
De même, si a a pour chiffre des unités 6, $a = 10k + 6$, et $a^2 = 100k^2 + 120k + 36 = 100k^2 + 10\times12k + 36$. Le chiffre des dizaines de ce nombre est le chiffre des unités de $12k + 3 = 2(6k + 1) + 1$ qui est impair.
2. Les seuls nombres dont le carré a pour chiffre des unités 5 sont les nombres dont le chiffre des unités est 5. Ainsi, si a a pour chiffre des unités 5, a peut s'écrire $a = 10k + 5$, et $a^2 = 100k^2 + 100k + 25 = 100(k^2 + k) + 25$. Le chiffre des dizaines de ce nombre est 2. Donc le chiffre des dizaines des carrés des entiers ayant 5 comme chiffre des unités est 5.

Exercice 7

En utilisant les propriétés sur les congruences, on trouve $a^2 \equiv 16 \equiv 1\ (5)$ et $b^2 \equiv 9 \equiv 4\ (5)$, puis $7a^2 \equiv 7 \equiv 2\ (5)$; $4b^2 \equiv 1\ (5)$; $2ab \equiv 24 \equiv 4\ (5)$. Ainsi $7a^2 - 4b^2 + 2ab \equiv 2 - 1 + 4 \equiv 0\ (5)$. Donc le reste de la division euclidienne de $7a^2 - 4b^2 + 2ab$ par 5 est 0.

2. On sait que $n^2 - 3n + 6 \equiv n^2 + 2n + 1 \equiv (n + 1)^2\ (5)$.

Il faut que $(n + 1)^2 \equiv 0\ (5)$, donc $n + 1 \equiv 0\ (5)$, soit $n \equiv -1 \equiv 4\ (5)$.

Donc l'ensemble des entiers relatifs n tels que $n^2 - 3n + 6$ est divisible par 5 est $\{n = 5k + 4,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 8: On sait que $10 \equiv 1\ (9)$, donc pour tout entier naturel n, $10^n \equiv 1\ (9)$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, $10^n(9n - 1) \equiv 9n - 1 \equiv -1 \equiv 8\ (9)$. Donc, pour tout entier naturel n, $10^n(9n - 1)$ a pour reste 8 dans la division euclidienne par 9.

Exercice 9 : On considère un entier naturel n.

1. On regarde toutes les congruences de n modulo 8 :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
n^2	0	1	4	1	0	1	4	1

D'après le tableau, n^2 est congru soit à 0, soit à 1, soit à 4 modulo 8.

2. Si n est divisible par 4, alors $n = 4k$ avec $k \in \mathbb{N}$, et $n^2 = 16k^2 = 8(2k^2)$, donc n^2 est divisible par 8. Réciproquement, si n^2 est divisible par 8, alors $n^2 \equiv 0\ (8)$, et d'après le tableau de la question précédente, $n \equiv 0\ (4)$, donc n est divisible par 4.

3. Ainsi, pour tout entier naturel a et b, le nombre $a^2 + b^2$ peut être congru à 0, 1, 4, 2, 5 modulo 8, donc le nombre $a^2 + b^2 + 2$ peut être congru à 2, 3, 5, 4, 7 modulo 8, et n'est donc pas divisible par 8.