

1. 1. Vrai-Faux

Fesic 2002, exercice 1

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{\ln(\sqrt{x})}$, D son ensemble de définition et C sa courbe représentative.

- a. On a $D =]0, +\infty[$.
- b. La courbe C admet une droite asymptote en $+\infty$.
- c. Pour tout $x \in D$, on a : $f(x) < \frac{x}{2}$.
- d. Pour tout $x \in D$, on a : $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{x(\ln x)^2}$.

Correction

a. Faux : On doit avoir $\sqrt{x} \neq 1$ et $x > 0$ donc $D =]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

b. Vrai : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty - \frac{1}{+\infty} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \frac{x}{2} = 0$ donc $y = \frac{x}{2}$ est asymptote de C .

c. Faux : $f(x) < \frac{x}{2}$ si $-\frac{1}{\ln(\sqrt{x})} < 0$, soit $\ln(\sqrt{x}) > 0$ donc quand $\sqrt{x} > 1 \Rightarrow x > 1$.

d. Vrai : Rappelons que $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ et remarquons que $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{2}{\ln x}$; nous avons donc

$$f'(x) = \frac{1}{2} - 2 \left(-\frac{1/x}{(\ln x)^2} \right) = \frac{1}{2} + 2 \left(\frac{1}{x(\ln x)^2} \right).$$

1. 2. Fonction ln, EPF 2006

1. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{x^2 + x + 1}$. Montrer que f est définie et dérivable sur \mathbb{R} et déterminer la fonction dérivée f' de f .

2. On considère la fonction $g : x \mapsto \frac{\ln x}{(\ln x)^2 + \ln x + 1}$ et on désigne par Γ sa courbe représentative dans

un repère orthonormal d'unités graphiques 1 cm.

- a. Exprimer g en fonction de f et préciser l'ensemble de définition de g .
- b. Déterminer la fonction dérivée g' de g (on pourra utiliser la question 1.).
- c. Etudier le signe de g' .
- d. Déterminer les limites de g en 0 et $+\infty$.
- e. Dresser le tableau des variations de g .
- f. Construire la courbe Γ en précisant la tangente au point d'abscisse 1.

Correction

1. f est un quotient de fonctions dérivables et le dénominateur ne s'annule pas, elle est donc continue et dérivable sur \mathbb{R} .

$$f'(x) = \frac{x^2 + x + 1 - x(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

2. a. $g(x) = \frac{\ln x}{\ln^2 x + \ln x + 1} = f(\ln x)$ donc, comme f est définie sur \mathbb{R} , g est définie sur $]0, +\infty[$.

b. $(f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)$. $g'(x) = \frac{1}{x} f'(\ln x) = \frac{1}{x} \left[\frac{-\ln^2 x + 1}{(\ln^2 x + \ln x + 1)^2} \right]$.

c. Le signe de g' dépend de celui de $1 - \ln^2 x = (1 - \ln x)(1 + \ln x)$.

x	0	$1/e$	e	$+\infty$
$1 - \ln x$		+	+	-
$1 + \ln x$		-	+	+
$g'(x)$		-	0	-
$g(x)$	0		$\frac{1}{3}$	0
				-1

d. En $+\infty$ g se comporte comme les termes de plus haut degré en \ln , soit $\frac{\ln x}{\ln^2 x} = \frac{1}{\ln x} \rightarrow \frac{1}{+\infty} = 0$; en 0

c'est pareil car $\ln x$ tend vers $-\infty$, donc encore 0 comme limite.

f. Tangente au point d'abscisse 1 : $y = x - 1$.

1. 3. Equation, France 2004

6 points

L'exercice comporte une annexe à rendre avec la copie.

Le but de ce problème est d'étudier, pour x et y éléments distincts de l'intervalle $]0; +\infty[$, les couples solutions de l'équation $x^y = y^x$ (E) et, en particulier, les couples constitués d'entiers.

1. Montrer que l'équation (E) est équivalente à $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$.

2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $h(x) = \frac{\ln x}{x}$. La courbe (C) représentative de la fonction h est donnée en annexe ; x_0 est l'abscisse du maximum de la fonction h sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

a. Rappeler la limite de la fonction h en $+\infty$ et déterminer la limite de la fonction h en 0.

b. Calculer $h'(x)$, où h' désigne la fonction dérivée de h ; retrouver les variations de h . Déterminer les valeurs exactes de x_0 et $h(x_0)$.

c. Déterminer l'intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses.

3. Soit λ un élément de l'intervalle $]0; \frac{1}{e}[$.

Prouver l'existence d'un unique nombre réel a de l'intervalle $]1; e[$ et d'un unique nombre réel b de l'intervalle $]e; +\infty[$ tel que $h(a) = h(b) = \lambda$.

Ainsi le couple (a, b) est solution de (E).

4. On considère la fonction s qui, à tout nombre réel a de l'intervalle $]1; e[$, associe l'unique nombre réel b de l'intervalle $]e; +\infty[$ tel que $h(a) = h(b)$ (on ne cherchera pas à exprimer $s(a)$ en fonction de a).

Par lecture graphique uniquement et sans justification, répondre aux questions suivantes :

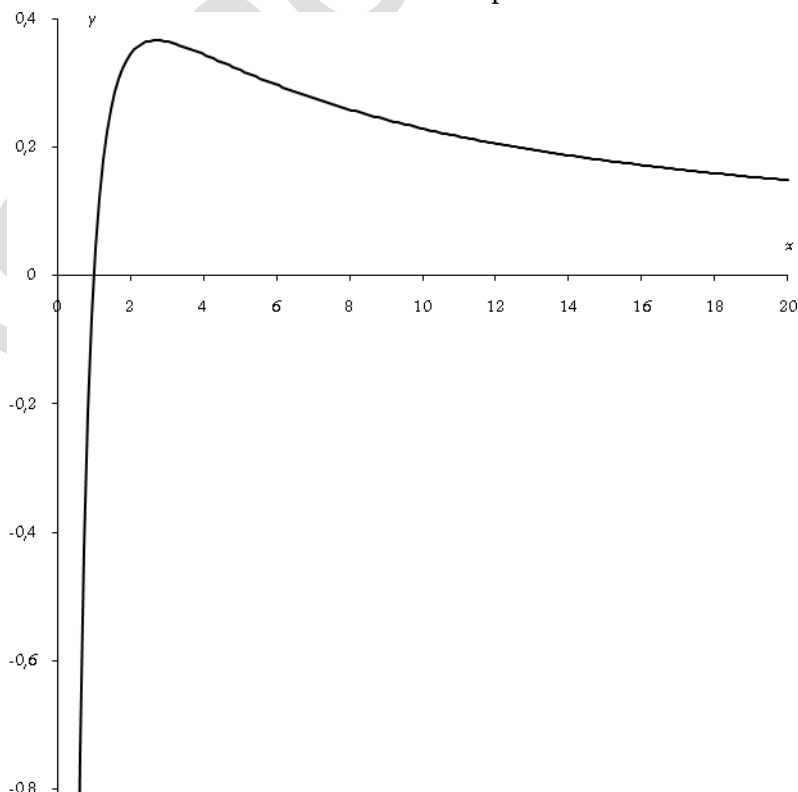
a. Quelle est la limite de s quand a tend vers 1 par valeurs supérieures ?

b. Quelle est la limite de s quand a tend vers e par valeurs inférieures ?

c. Déterminer les variations de la fonction s . Dresser le tableau de variations de s .

5. Déterminer les couples d'entiers distincts solutions de (E).

A rendre avec la copie.



Correction

1. (E) : $x^y = y^x \Leftrightarrow \ln(x^y) = \ln(y^x) \Leftrightarrow y \ln x = x \ln y \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$: pour la première égalité, \ln est bijective, x et y sont strictement positifs ; la deuxième est une propriété de \ln , le reste est du calcul.

2. a. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \ln x = +\infty \times -\infty = -\infty$.

b. $h'(x) = \frac{\frac{1}{x} - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$; $1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq e = x_0$; $h(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$.

c. $h(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

3. h est continue, monotone strictement croissante de $]1; e[$ vers $]0; \frac{1}{e}[$ (voir les variations de h) ; il existe donc un unique réel a tel que $h(a) = \lambda$; de même h est continue, monotone strictement décroissante de $]e; +\infty[$ vers $]0; \frac{1}{e}[$ (voir les variations de h) ; il existe donc un unique réel b tel que $h(b) = \lambda$ (sur chacun des intervalles considérés h est bijective, même si elle ne l'est pas globalement).

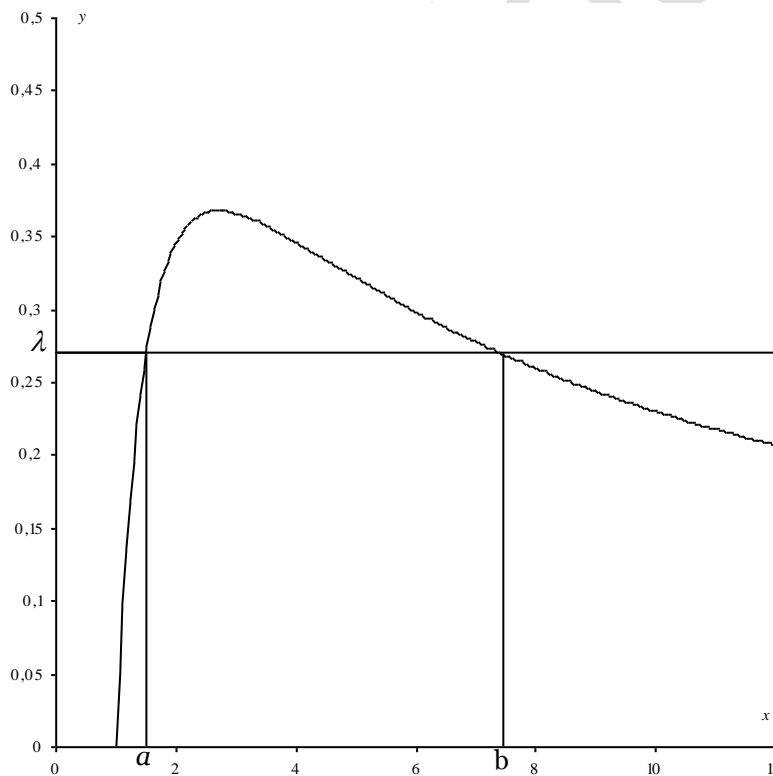
4. $s(a) = b$.

a. Quand a tend vers 1, λ tend vers 0, donc b tend vers $+\infty$.

b. Quand a tend vers e inférieurement, λ tend vers $1/e$, donc b tend vers e supérieurement.

c. Lorsque a varie de 1 à e , b varie de $+\infty$ à e , donc s est décroissante.

5. Entre 1 et e il n'y a que deux entiers : 1 et 2 ; pour $a = 1$, $b = +\infty \dots$ pour $a = 2$, b semble valoir 4. Vérifions en remplaçant dans (E) : $2^4 = 16, 4^2 = 16$ ok !



1.4. Dérivées et \ln

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = (\ln x)^2 - 6 \ln x + 5$.

2. $f(x) = 2x + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

3. $f(x) = \frac{x + \ln x}{x^2}$.

Correction

1. $f'(x) = 2 \frac{1}{x} \times \ln x - 6 \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x - 6}{x}$.

$$2. f(x) = 2x + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 2x + \ln(x+1) - \ln x \Rightarrow$$

$$f'(x) = 2 + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{2x(x+1) + x - x - 1}{x} = \frac{2x^2 + 2x - 1}{x} = 2x + 2 - \frac{1}{x} = 2 - \frac{1}{x(x+1)}.$$

$$3. f(x) = \frac{x + \ln x}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2},$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln x \times 2x}{x^4} = -\frac{1}{x^2} + \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1 - 2 \ln x}{x^3} = \frac{1 - 2 \ln x - x}{x^3}.$$

1.5. Primitives et ln

1. Calculer la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right)$ sur $]0; 3[$.

2. a. Déterminer toutes les primitives de la fonction h définie par : $h(x) = \frac{4x}{(3x^2+2)^3}$.

b. Déterminer la primitive de h qui s'annule en 10.

4. Déterminer une primitive F de chacune des fonctions suivantes qui réponde à la condition posée :

a. $f(x) = \frac{x+0,5}{x^2+x+1}$ et $F(1) = 0$.

b. $f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin x \cdot \cos x}$ et $F(2) = 1$.

4. Calculer la dérivée de la fonction définie par $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right)$.

5. Trouver une primitive de la fonction définie par : $f(x) = \frac{x+1}{(x^2+2x)^3}$.

6. a. Montrer qu'une primitive de $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ est $x \mapsto \frac{(\ln x)^2}{2}$. En déduire l'ensemble des primitives F de

f .

b. Déterminer la primitive de f qui s'annule pour $x = 1$.

Correction

1. $f(x) = \ln(u(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \ln'(u(x)) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

avec $u(x) = \frac{3+x}{3-x}$ $u'(x) = \frac{1 \times (3-x) - (-1) \times (3+x)}{(3-x)^2} = \frac{3-x+3+x}{(3-x)^2} = \frac{6}{(3-x)^2}$

d'où $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\frac{6}{(3-x)^2}}{\frac{3+x}{3-x}} = \frac{6}{(3-x)^2} \times \frac{3-x}{3+x} = \frac{6}{(3-x)(3+x)}$.

2. a. $h(x) = \frac{4x}{(3x^2+2)^3} = \frac{4}{6} \times \frac{6x}{(3x^2+2)^3} = \frac{2}{3} \times \frac{u'(x)}{u(x)^3} = \frac{2}{3} u'(x) u(x)^{-3}$ avec $u(x) = 3x^2+2$ et $n-1 = -3 \Rightarrow n = -2$.

$H(x) = \frac{2}{3} \times \frac{u(x)^{-2}}{-2} + K = -\frac{1}{3u(x)^2} + K = -\frac{1}{3(3x^2+2)^2} + K$ (K réel).

b. $H(10) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3(3 \times 10^2 + 2)^2} + K = 0 \Leftrightarrow K = \frac{1}{3 \times 302^2} = \frac{1}{273612}$ d'où $H(x) = -\frac{1}{3(3x^2+2)^2} + \frac{1}{273612}$.

4. $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right)$:

$f(x) = \ln(u(x))$ avec $u(x) = \frac{1-x}{x+1}$ et $u'(x) = \frac{-1 \times (x+1) - (1-x) \times 1}{(x+1)^2} = \frac{-x-1-1+x}{(x+1)^2} = \frac{-2}{(x+1)^2}$;

$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\frac{-2}{(x+1)^2}}{\frac{1-x}{x+1}} = \frac{-2}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{1-x} = \frac{-2}{(1+x)(1-x)} = \frac{2}{(1+x)(x-1)} = \frac{2}{x^2-1}$.

5. $f(x) = \frac{x+1}{(x^2+2x)^3}$. Soit $u(x) = x^2+2x$, on a : $u'(x) = 2x+2 = 2(x+1)$ et

$$f(x) = \frac{x+1}{(x^2+2x)^3} = \frac{1}{2} \times \frac{2(x+1)}{(x^2+2x)^3} = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u^3(x)} = \frac{1}{2} u'(x) \times u^{-3}(x)$$

qui est de la forme $\frac{1}{2} u'(x) \times u^{n-1}(x)$ avec $n-1 = -3$, ou $n = -2$.

Les primitives de telles fonctions sont de la forme :

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u^n(x)}{n} = \frac{1}{2} \times \frac{(x^2+2x)^{-2}}{-2} = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{(x^2+2x)^2} \text{ (+ constante...)}$$

6. a. Dérivons $u(x) = \frac{(\ln x)^2}{2}$, $u'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln x = \frac{\ln x}{x}$ donc u est bien une primitive de $\frac{\ln x}{x}$.

Toutes les primitives sont alors de la forme $u(x)+K$.

b. $u(1)+K=0 \Leftrightarrow K=-u(1)=-\frac{(\ln 1)^2}{2}=0$.

1. 6. Calcul de limites

1. Soit $f(x) = \frac{\cos(\pi x^2 - \frac{\pi}{3}) + \frac{1}{2}}{x-1}$; calculer $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

2. $f(x) = \ln\left(\frac{ex+3}{x+5}\right)$; calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3. $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+3}{e^x}\right)$; calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x + 1}{2x}$.

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

Correction

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(\pi x^2 - \frac{\pi}{3}) + \frac{1}{2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$ avec $\begin{cases} f(x) = \cos(\pi x^2 - \frac{\pi}{3}) \\ f(1) = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} \end{cases}$

On calcule donc $f'(x) = -2\pi x \sin(\pi x^2 - \frac{\pi}{3})$ d'où $f'(1) = -2\pi \sin(\pi - \frac{\pi}{3}) = -2\pi \sin(\frac{2\pi}{3}) = -2\pi \frac{\sqrt{3}}{2} = -\pi\sqrt{3}$.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ex+3}{x+5} = e \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{ex+3}{x+5}\right) = \ln e = 1$.

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x^2+3}{e^x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x^2+3) - \ln e^x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x^2(1+\frac{3}{x^2})) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln x^2 + \ln(1+\frac{3}{x^2}) - x]$,

or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1+\frac{3}{x^2}\right) = \ln 1 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x^2 - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 \ln x - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2 \frac{\ln x}{x} - 1\right) = -\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x + 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0$

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$ d'après le cours.

1. 7. Résolution (in)équations

1. Résoudre l'équation : $\ln(x^2 - 3x - 2) = \ln(2x - 6)$.

2. Résoudre l'inéquation : $e^{2\ln\left(\frac{1}{x}\right)+1} > 2e$.

3. Résoudre dans \square le système : $\begin{cases} \ln x - \ln y = 1 \\ x + y = 2e \end{cases}$.

4. Résoudre l'inéquation : $\ln(1+x) - \ln(1-x) > \ln 2x - \ln(1+x)$.

5. Résoudre : $1 + \ln(x+3) = \ln(x^2 + 2x - 3)$.

6. Résoudre : $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x)$.

Correction

1. Domaine de définition : $D_1 = \left] -\infty ; \frac{3-\sqrt{17}}{2} \right[\cup \left] \frac{3+\sqrt{17}}{2} ; +\infty \right[$, par ailleurs $2x - 6 > 0$ si et seulement si $x > 3$. On a donc $D_f = D_1 \cap]3 ; +\infty[= \left] \frac{3+\sqrt{17}}{2} ; +\infty \right[$ car $\frac{3+\sqrt{17}}{2} \approx 3,56$.

Pour la résolution : $\ln a = \ln b$ équivaut à $a = b$ donc, l'équation devient : $x^2 - 3x - 2 = 2x - 6$ ou encore $x^2 - 5x + 4 = 0$ d'où les solutions 1 et 4 ; mais seule 4 est valable.

2. Domaine de définition : il faut que $x > 0$, soit $D_f =]0 ; +\infty[$.

$e^{2\ln\left(\frac{1}{x}\right)+1} > 2e \Leftrightarrow e^{-2\ln x+1} > 2e \Leftrightarrow -2\ln x + 1 > \ln(2e) \Leftrightarrow -2\ln x > \ln 2 + \ln e - 1 \Leftrightarrow \ln x < -\frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow x < e^{-\frac{\ln 2}{2}}$. On

peut simplifier un peu : $e^{-\frac{1}{2}\ln 2} = (e^{\ln 2})^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et finalement $S = \left] 0 ; \frac{\sqrt{2}}{2} \right[$.

3. $\begin{cases} \ln x - \ln y = 1 \\ x + y = 2e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln \frac{x}{y} = \ln e \\ x + y = 2e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = ye \\ ye + y = 2e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2e}{1+e} \\ x = \frac{2e^2}{1+e} \end{cases}$. Les deux solutions sont positives donc c'est

bon.

4. Attention à l'ensemble de définition : $1+x > 0, 1-x > 0, 2x > 0 \Rightarrow x > -1, x < 1, x > 0 \Rightarrow x \in]0 ; 1[$.

On a alors $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) > \ln\left(\frac{2x}{1+x}\right) \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} - \frac{2x}{1+x} > 0 \Leftrightarrow \frac{1+2x+x^2-2x+2x^2}{(1-x)(1+x)} > 0 \Leftrightarrow \frac{1+3x^2}{(1-x)(1+x)} > 0$.

Le numérateur et le dénominateur sont positifs sur $]0 ; 1[$, la solution est donc l'intervalle $]0 ; 1[$.

5. $1 + \ln(x+3) = \ln(x^2 + 2x - 3)$: il faut que $x > -3$ et que $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3) > 0$ (à l'extérieur des racines) donc $D =]-3 ; +\infty[$.

$1 + \ln(x+3) = \ln(x^2 + 2x - 3) \Leftrightarrow \ln e + \ln(x+3) = \ln(x^2 + 2x - 3) \Leftrightarrow \ln e(x+3) = \ln(x^2 + 2x - 3) \Leftrightarrow e(x+3) = x^2 + 2x - 3$.

\ln est une bijection : $x^2 + (2-e)x - 3(1+e) = 0$,

$\Delta = (2-e)^2 + 12(1+e) = 4 - 4e + e^2 + 12 + 12e = e^2 + 8e + 16 = (e+4)^2$.

$x = \frac{-(2-e) \pm (e+4)}{2}$, $x_1 = -3 \notin D$ ou $x_2 = e+1 \in D$. $S = \{e+1\}$.

6. $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x)$

Il faut que $x^2 - 4e^2 > 0$ et que $3x > 0$ i.e. $x > 0$ et $x^2 > 4e^2$ c'est-à-dire ($x > 0$) et ($x > 2e$ ou $x < -2e$).

$D =]2e ; +\infty[$.

$\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x) \Leftrightarrow \ln(x^2 - 4e^2) < \ln e + \ln(3x) \Leftrightarrow \ln(x^2 - 4e^2) < \ln(3ex) \Leftrightarrow x^2 - 4e^2 < 3ex \Leftrightarrow (E) x^2 - 3ex - 4e^2 < 0$.

$\Delta = 9e^2 + 16e^2 = 25e^2 = (5e)^2$, $x = \frac{3e \pm 5e}{2}$; (E) $\Leftrightarrow -e < x < 4e$. $S =]2e ; 4e[$.

1. 8. Avec ROC

1. La fonction g est définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = 2x\sqrt{x} - 3\ln x + 6$.

En utilisant les variations de g , déterminer son signe suivant les valeurs de x .

2. La fonction numérique f est définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{3\ln x}{\sqrt{x}} + x - 1.$$

a. **Démonstration de cours** : au choix

- démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et en déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

ou bien

- démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et en déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

b. Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$ (en $+\infty$, on pourra poser $X = \sqrt{x}$).

c. Utiliser la première partie pour déterminer le sens de variation de f .

3. Soit Δ la droite d'équation $y = x - 1$ et C la représentation graphique de f dans un repère orthonormé du plan. Montrer que Δ est asymptote de C et étudier leurs positions relatives. construire C et Δ .

Correction

1. $g'(x) = 2\sqrt{x} + 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{4x+2x}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{x} = \frac{3x}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x} = 3 \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$.

On a alors $x^2 - \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq \sqrt{x} \Leftrightarrow x^4 \geq x \Leftrightarrow x(x^3 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ car x est positif.

Conclusion g est décroissante avant 1, croissante après ; on a un minimum en 1 qui vaut $g(1)=2+0+6=8$ et est positif. Finalement $g(x)$ est toujours positive.

$$2. f(x) = \frac{3 \ln x}{\sqrt{x}} + x - 1$$

a. No comment.

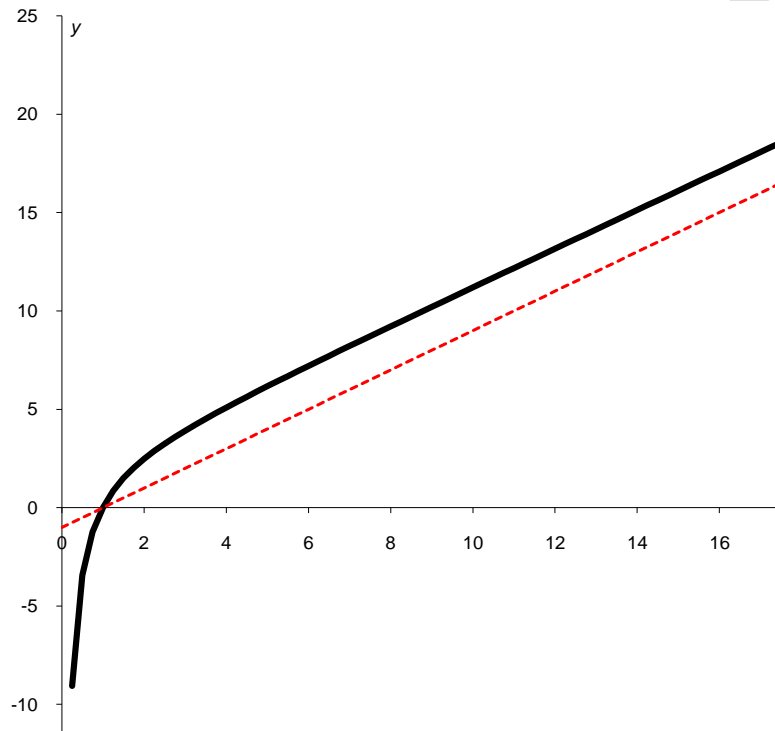
b. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, si on pose $X = \sqrt{x}$, cela nous donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X^2}{X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} 2 \frac{\ln X}{X} = 0$.

En 0, $\ln x$ tend vers $-\infty$ et $\frac{1}{\sqrt{x}}$ tend vers $+\infty$ donc $\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ tend vers $-\infty$ ainsi que f .

$$c. f'(x) = 3 \frac{\frac{1}{x} \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x}{x} + 1 = 3 \frac{\frac{2}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x}{x} + \frac{x}{x} = \frac{3(2 - \ln x) + 2x\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}} = \frac{6 - 3 \ln x + 2x\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}} = \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$$

Donc f' est du signe de g et donc toujours positive, f est donc croissante.

3. On a $f(x) - (x-1) = \frac{3 \ln x}{\sqrt{x}}$ qui tend vers 0 à l'infini et qui est positif (C au-dessus de Δ) lorsque $x > 1$, négatif lorsque $x < 1$ (C en dessous de Δ).



1.9. Dérivation et encadrement

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 3 cm).

1. On considère la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Montrer que f est continue en 0.

2. a. Etudier le sens de variation de la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)$.

Calculer $g(0)$ et en déduire que sur $\square +$: $\ln(1+x) \leq \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)$.

b. Par une étude analogue, montrer que si $x \geq 0$, alors $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$.

c. Établir que pour tout x strictement positif on a $-\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$.

En déduire que f est dérivable en zéro et que $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

3. a. Soit h la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $h(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(1+x)$.

Étudier son sens de variation et en déduire le signe de h sur $[0, +\infty[$.

b. Montrer que sur $[0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$.

c. Dresser le tableau de variation de f en précisant la limite de f en $+\infty$

d. On désigne par C la représentation graphique de f . Construire la tangente T à C au point d'abscisse o . Montrer que C admet une asymptote. Tracer la courbe C .

Correction

1. $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$; f est continue en o ssi $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, or le cours donne justement la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

2. a. $g'(x) = \frac{1}{1+x} - (1-x+x^2) = \frac{1-1-x+x+x^2-x^2-x^3}{1+x} = \frac{-x^3}{1+x} \leq 0$. Donc g est décroissante et comme

$g(0)=0$, on a également $g(x) \leq 0$, soit $\ln(1+x) \leq \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)$.

b. On prend $k(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \Rightarrow k'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1-1-x+x+x^2}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} \geq 0$ et $k(0)=0$ donc $k(x) \geq 0$, soit $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$.

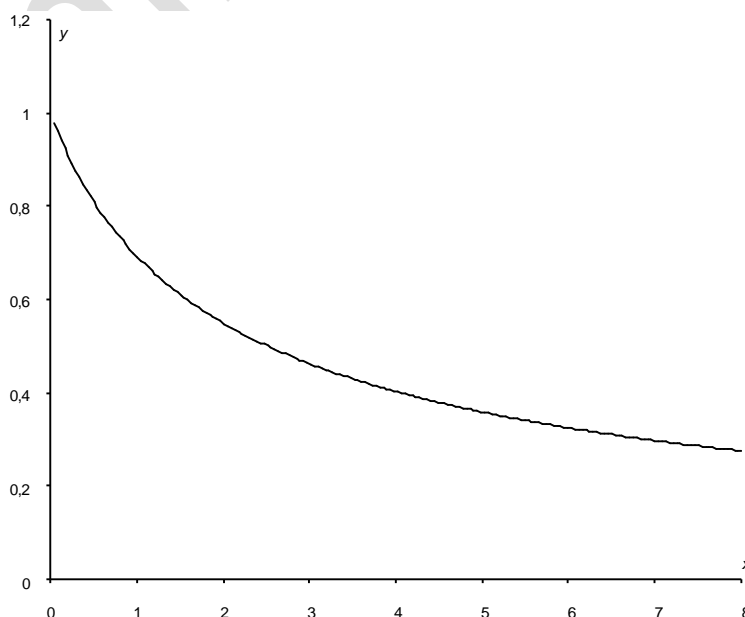
c. $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \geq \ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \geq \ln(1+x) - x \geq -\frac{x^2}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} + \frac{x}{3} \geq \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leq -\frac{1}{2}$.

f dérivable en zéro : on calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$; or le résultat précédent montre que cette limite est précisément $-\frac{1}{2}$ qui est donc $f'(0)$.

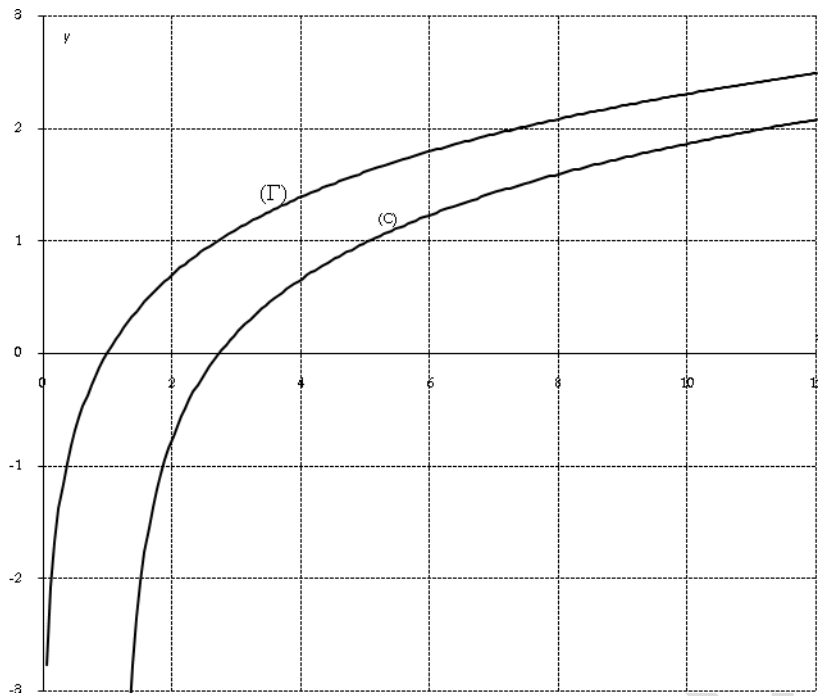
3. a. $h(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(1+x)$, $h'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{1-x-1}{(x+1)^2} = \frac{-x}{(x+1)^2} \leq 0$; on a $h(0)=0$ et h décroissante donc $h(x) \leq 0$.

b. $f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x}x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2} \leq 0$.

c. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x)}{x} \square \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.



1. 10. Fonction+équation, Am. Nord 06/2008, 6 pts



Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par $f(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x}$.

On nomme (C) la courbe représentative de f et (Γ) la courbe d'équation $y = \ln x$ dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Étudier les variations de la fonction f et préciser les limites en 1 et en $+\infty$.

2. a. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x]$. Interpréter graphiquement cette limite.

b. Préciser les positions relatives de (C) et de (Γ) .

3. On se propose de chercher les tangentes à la courbe (C) passant par le point O.

a. Soit a un réel appartenant à l'intervalle $]1; +\infty[$. Démontrer que la tangente T_a à (C) au point d'abscisse a passe par l'origine du repère si et seulement si $f(a) - af'(a) = 0$.

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - xf'(x)$.

b. Montrer que sur $]1; +\infty[$, les équations $g(x) = 0$ et $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$ ont les mêmes solutions.

c. Après avoir étudié les variations de la fonction u définie sur \mathbb{R} par $u(t) = t^3 - t^2 - t - 1$, montrer que la fonction u s'annule une fois et une seule sur \mathbb{R} .

d. En déduire l'existence d'une tangente unique à la courbe (C) passant par le point O.

La courbe (C) et la courbe (Γ) sont données ci-dessus. Tracer cette tangente le plus précisément possible sur cette figure.

4. On considère un réel m et l'équation $f(x) = mx$ d'inconnue x .

Par lecture graphique et sans justification, donner, suivant les valeurs du réel m , le nombre de solutions de cette équation appartenant à l'intervalle $]1; 10]$.

Correction

1. On a $f = u - \frac{1}{u}$, avec $u(x) = \ln x$, dérivable et qui ne s'annule pas sur $]1; +\infty[$. Donc f est dérivable sur $]1; +\infty[$ en tant que différence de deux fonctions dérivables sur $]1; +\infty[$.

$$f' = u' - \left(\frac{1}{u}\right)' = u' - \frac{-u'}{u^2} = u' + \frac{u'}{u^2} \text{ avec } u'(x) = \frac{1}{x}. \text{ Donc } f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{(\ln x)^2}\right).$$

Comme $x > 1$, $\frac{1}{x} > 0$ et $1 + \frac{1}{(\ln x)^2} > 0$, c'est-à-dire $f'(x) > 0$. f est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln x) = 0^+$ d'où $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(\ln x)} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ (par somme des limites).

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = +\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\ln x)} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (par somme des limites).

2. a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\ln x} \right) = 0$. Les courbes (C) et (Γ) sont asymptotes en $+\infty$.

b. $f(x) - \ln x = -\frac{1}{\ln x}$; or, pour $x > 1$, $\ln x > 0$; donc $f(x) - \ln x < 0$, (C) est en dessous de (Γ).

3. a. T_a a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a) = f'(a)x + (f(a) - af'(a))$; T_a passe par l'origine du repère si $0 = f'(a) \times 0 + f(a) - af'(a) \Leftrightarrow f(a) - af'(a) = 0$.

b. $g(x) = 0$ équivaut à $f(x) - xf'(x) = 0$; or $f'(x) = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{(\ln x)^2} \right)$ et $f(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x}$, soit :

$$\ln x - \frac{1}{\ln x} - x \times \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{(\ln x)^2} \right) = 0 \Leftrightarrow \ln x - \frac{1}{\ln x} - 1 - \frac{1}{(\ln x)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{(\ln x)^3 - \ln x - (\ln x)^2 - 1}{(\ln x)^2} = 0.$$

Par conséquent les équations $g(x) = 0$ et $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$ ont les mêmes solutions.

c. $u'(t) = 3t^2 - 2t - 1 = (t-1)(3t+1)$. $u'(t) \geq 0$ pour t appartenant à $\left] -\infty; -\frac{1}{3} \right] \cup [1; +\infty[$ et $u'(t) \leq 0$ pour t appartenant à $\left[-\frac{1}{3}; 1 \right]$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$	
$u'(t)$	+	0	-	0	+
u	$-\infty$	$-\frac{22}{27}$	-2	$+\infty$	

Avant 1 le maximum de u est négatif; après 1, u passe de -2 à $+\infty$, on en déduit que la fonction u s'annule une seule fois sur \mathbb{R} .

d. T_a passe par l'origine du repère si $(\ln x)^3 - \ln x - (\ln x)^2 - 1 = 0$, c'est-à-dire si $u(\ln x) = 0$. Or la question 3. c. prouve que cette équation n'admet qu'une solution, que l'on notera a_0 , sur \mathbb{R} .

À l'aide de la calculatrice, on trouve $a_0 \approx 6,29$: il n'existe qu'une seule tangente à (C) passant par l'origine du repère.

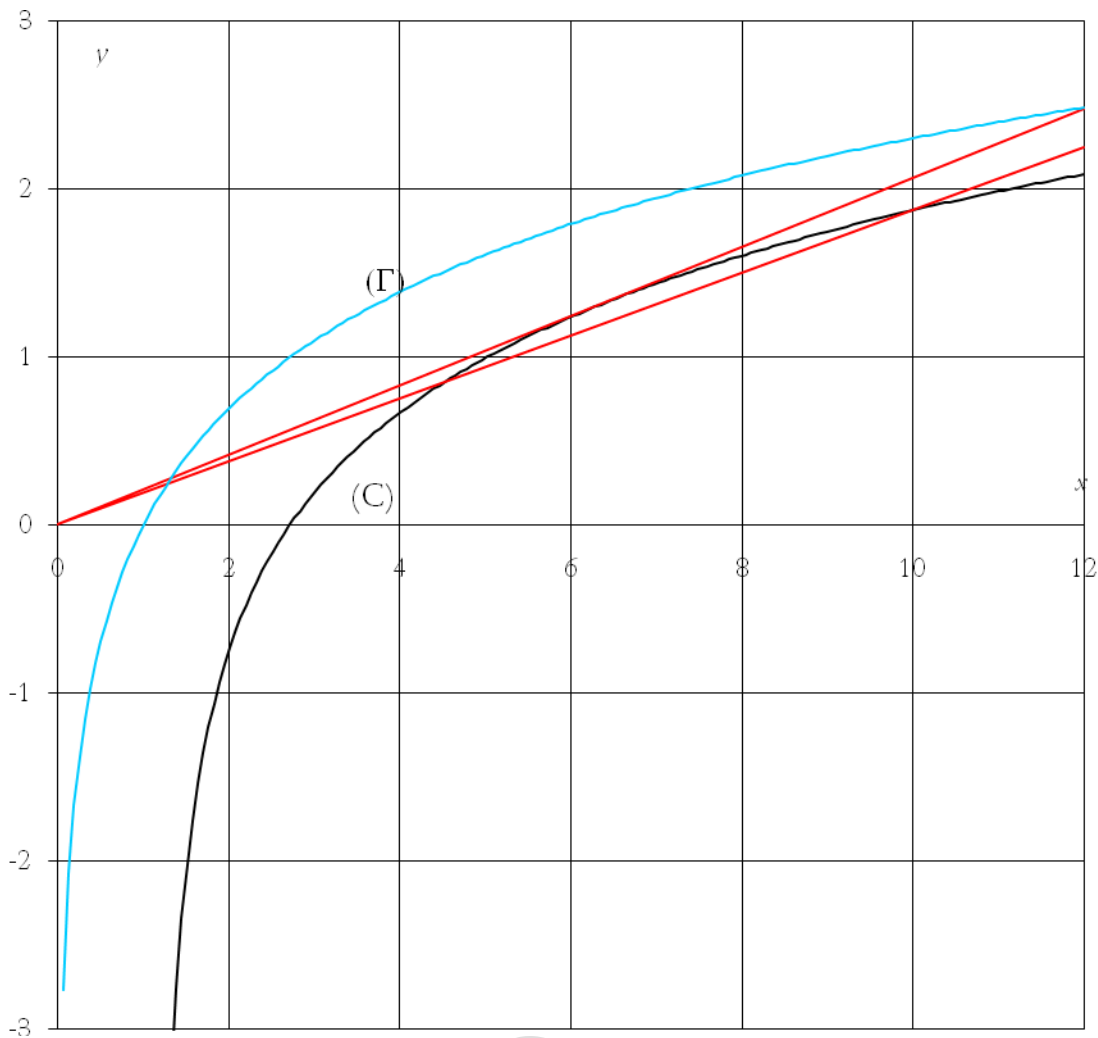
4. Par lecture graphique: résoudre $f(x) = mx$ revient à chercher l'intersection entre (C) et les droites

passant par l'origine et de pente m ; on a donc pour $1 \leq x \leq 10$ et $m_0 = \frac{f(10)}{10}$:

- si $m \leq m_0$ l'équation $f(x) = mx$ admet une seule solution;

- si $m_0 \approx 0,187 \leq m \leq f'(a_0) \approx 0,2$ l'équation $f(x) = mx$ admet deux solutions;

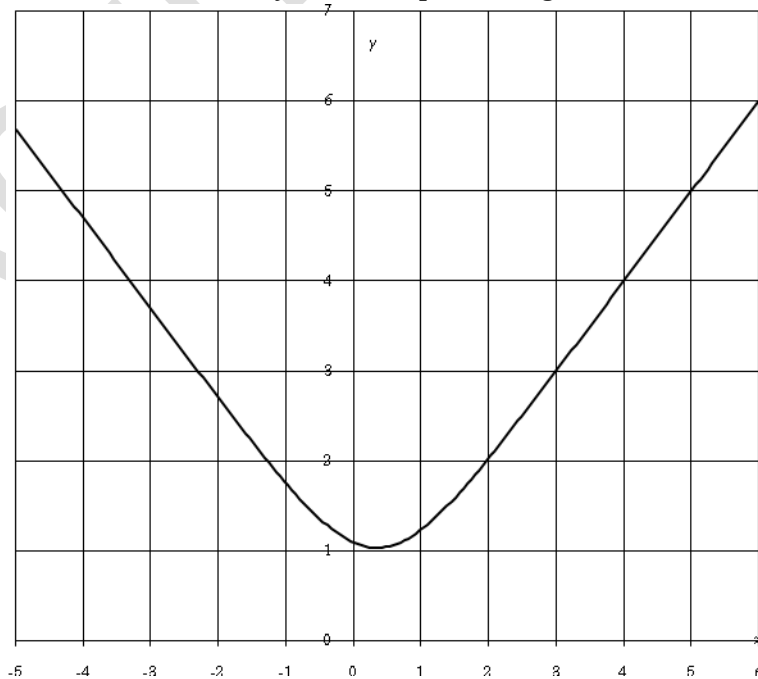
- si $m > f'(a_0)$ l'équation $f(x) = mx$ n'admet aucune solution.



1. 11. Ln et exp+intégrale Polynésie 09/2008 6 pts

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x})$.

La courbe (C) représentative de la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.



Partie A - Étude de la fonction f

1. Montrer que, pour tout réel x , $f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$.

On admet que, pour tout réel x , $f(x) = -x + \ln(2 + e^{2x})$.

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d) d'équation $y = x$ est asymptote à (C).

Étudier la position relative de (C) et de (d).

3. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d') d'équation $y = -x + \ln 2$ est asymptote à (C).

4. Étudier les variations de la fonction f . Montrer que le minimum de la fonction f est égal à $\frac{3}{2} \ln 2$.

5. Tracer les droites (d) et (d') sur la figure.

Partie B - Encadrement d'une intégrale

On pose $I = \int_2^3 [f(x) - x] dx$.

1. Donner une interprétation géométrique de I .

2. Montrer que, pour tout $X \in [0; +\infty[$, $\ln(1 + X) \leq X$.

En déduire que $0 \leq I \leq \int_2^3 2e^{-2x} dx$ et donner un encadrement de I d'amplitude $0,02$.

Correction

Partie A

1. $f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x}) = \ln(e^x(1 + 2e^{-2x})) = \ln e^x + \ln(1 + 2e^{-2x}) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$.

Remarque : si on met en facteur e^{-x} à la place de e^x , on a $f(x) = -x + \ln(2 + e^{2x})$.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \ln(1 + 2e^{-2x}) = +\infty + \ln(1 + 2 \times 0) = +\infty$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + 2e^{-2x}) = \ln(1 + 2 \times 0) = 0$: la droite (d) d'équation $y = x$ est asymptote à (C).

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x + \ln(2 + e^{2x}) = +\infty + \ln(2 + 0) = +\infty$;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(2 + e^{2x}) = \ln 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (-x + \ln 2) = 0$: la droite (d') $y = -x + \ln 2$ est asymptote à (C).

4. $f'(x) = \frac{e^x - 2e^{-x}}{e^x + 2e^{-x}}$; $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 2e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} \geq 2 \Leftrightarrow 2x \geq \ln 2 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2} \ln 2$.

$f\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = \ln\left(e^{\frac{1}{2} \ln 2} + 2e^{-\frac{1}{2} \ln 2}\right) = \ln\left((e^{\ln 2})^{1/2} + 2(e^{\ln 2})^{-1/2}\right) = \ln(2^{1/2} + 2^1 2^{-1/2}) = \ln(2 \times 2^{1/2}) = \ln(2^{3/2})$.

Partie B - Encadrement d'une intégrale

1. I représente l'aire comprise entre (C), la droite ($y=x$), les droites $x=2$ et $x=3$.

2. $\ln(1 + X) \leq X \Rightarrow \ln(1 + 2e^{-2x}) \leq 2e^{-2x}$ car $2e^{-2x} > 0$. Par ailleurs on a $f(x) \geq x \Rightarrow I \geq 0$.

$I = \int_2^3 [f(x) - x] dx = \int_2^3 \ln(1 + 2e^{-2x}) dx \leq \int_2^3 2e^{-2x} dx = \left[\frac{2}{-2} e^{-2x}\right]_2^3 = -e^{-6} + e^{-4} \approx 0,015$; $0,01$ est une

estimation de I d'amplitude $0,02$.

1. 12. Sommes partielles série harmonique, N. Calédonie 2007

7 points

Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$.

PARTIE A

1. Montrer que pour tout n de \mathbb{N}^* , $u_{n+1} - u_n = \frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$.

2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

3. Établir alors que (u_n) est une suite convergente.

L'objectif de la partie B est de déterminer la valeur de la limite de la suite (u_n) .

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

1. a. Justifier pour tout entier naturel n non nul l'encadrement : $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n}$.

b. Vérifier que $\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{n} - f(n)$.

c. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n(n+1)}$.

2. On considère la suite (S_n) définie sur \mathbb{N}^* par

$$S_n = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{2n(2n+1)}.$$

a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) \leq S_n$.

b. Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x distinct de -1 et de 0 , on ait

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$

c. En déduire l'égalité $S_n = \frac{n+1}{n(2n+1)}$.

d. En utilisant les questions précédentes, déterminer alors la limite quand n tend vers $+\infty$ de

$$\sum_{k=n}^{k=2n} f(k) = f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n).$$

e. Vérifier que pour tout entier $n > 1$, $f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) = u_n - \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)$.

f. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Correction

$$u_n = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

PARTIE A

1. $u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n}$ d'où

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}.$$

2. La suite (u_n) est décroissante puisque $-3n-2 < 0$.

3. La suite est positive puisque somme de termes positifs ; elle est décroissante et minorée, elle converge bien.

PARTIE B

1. a. $n \leq x \leq n+1 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n}$.

b. $\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_n^{n+1} = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$;

par ailleurs $\frac{1}{n} - f(n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ car $\ln \frac{a}{b} = -\ln \frac{b}{a}$.

c. Comme $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n}$, on a :

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} - f(n) \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \leq -f(n) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

2. a. Comme

$$0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n(n+1)},$$

$$0 \leq f(n+1) \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)},$$

....

$$0 \leq f(2n) \leq \frac{1}{2n(2n+1)},$$

on somme toutes ces inégalités et on obtient :

$$0 \leq f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) \leq \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{2n(2n+1)} = S_n.$$

b. On a déjà le résultat au 1.c. : $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$...

c. On remplace donc dans $S_n = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1}$ car tous les termes intermédiaires s'éliminent ; $S_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n+1-n}{n(2n+1)} = \frac{n+1}{n(2n+1)}$.

d. S_n tend vers 0 en $+\infty$; grâce aux « gendarmes » $f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n)$ tend également vers 0.

e. $u_n = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$;

$$\begin{aligned} f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) &= \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) + \dots + \frac{1}{2n} + \ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} + \ln\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\dots\left(\frac{2n}{2n+1}\right)\right] \\ &= u_n + \ln\left[\frac{n}{2n+1}\right] = u_n - \ln\left[\frac{2n+1}{n}\right] = u_n - \ln\left[2 + \frac{1}{n}\right]. \end{aligned}$$

Les logarithmes se simplifient car tous les termes du produit à l'intérieur du crochet s'éliminent.

f. On sait déjà que $f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n)$ tend vers 0 ; le logarithme tend vers $\ln 2$ donc u_n tend vers $\ln 2$.

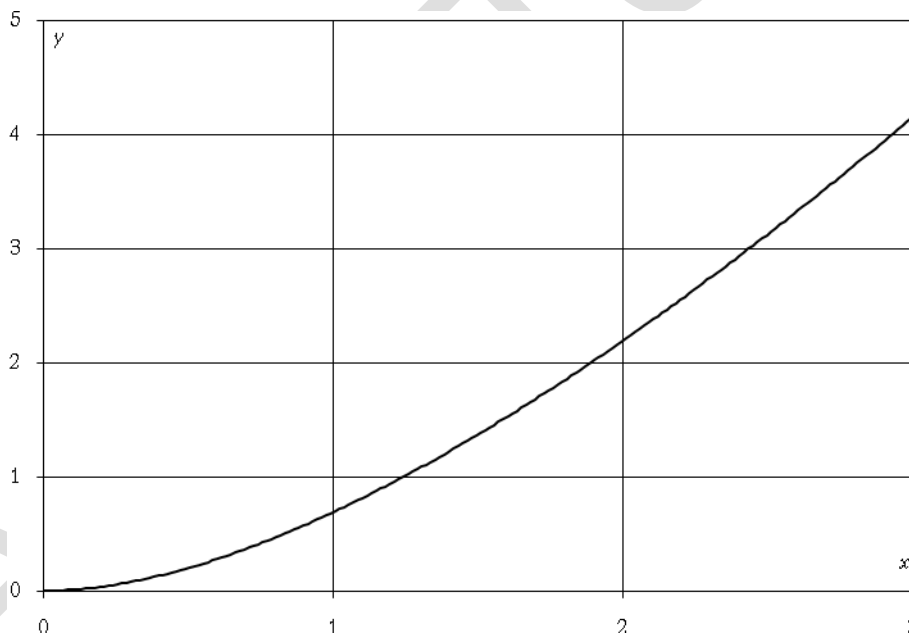
1. 13. Fonction+aire+suite, Liban 2006

7 points

Partie A : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x+1)$.

Sa courbe représentative (C) dans un repère orthogonal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ est donnée ci-dessous.



1. a. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

b. L'axe des abscisses est-il tangent à la courbe (C) au point O ?

2. On pose $I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx$.

a. Déterminer trois réels a , b et c tels que, pour tout $x \neq -1$, $\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$.

b. Calculer I .

3. À l'aide d'une intégration par parties et du résultat obtenu à la question 2, calculer, en unités d'aires, l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0,25$ admet une seule solution sur l'intervalle $[0 ; 1]$. On note α cette solution. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

Partie B : étude d'une suite

La suite (u_n) est définie sur \mathbb{N} par $u_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx$.

- Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) . La suite (u_n) converge-t-elle ?
- Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Correction

Partie A : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x+1)$.

1. a. $f'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$; sur $[0; +\infty[$ les deux termes $\ln(1+x)$ et $\frac{x}{1+x}$ sont positifs donc f est croissante sur cet intervalle.

b. La tangente en O a pour équation $y = (\ln 1 + 0)(x - 0) + 0 = 0$ donc l'axe des abscisses est tangent à (C) au point O .

2. a. $\frac{x^2}{x+1} = \frac{x^2-1}{x+1} + \frac{1}{x+1} = x-1 + \frac{1}{x+1}$.

b. $I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx = \int_0^1 x-1 + \frac{1}{x+1} dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+1| \right]_0^1 = -\frac{1}{2} + \ln 2$.

3. $\int_0^1 x \ln(1+x) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{1+x} dx = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} I = \frac{1}{4}$.

4. La fonction f est continue, monotone strictement croissante et donc bijective de $f(0) = 0$ vers $f(1) = \ln 2 \approx 0,69$; comme $0,25 \in [0; \ln 2]$, $0,25$ a un unique antécédent dans $[0; 1]$. On obtient

x	$f(x)$
0,56020942	0,24919239
0,56544503	0,25341558

d'où $\alpha \approx 0,56$.

Partie B : étude d'une suite

1. $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 x^{n+1} \ln(x+1) dx - \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx = \int_0^1 x^n (x-1) \ln(x+1) dx$; comme $(x-1)$ est négatif et que les autres termes sont positifs sur $[0; 1]$, l'intégrale est négative et (u_n) est décroissante. Par ailleurs il est évident que (u_n) est positive donc (u_n) décroissante, minorée par 0 converge.

2. On a $\ln(x+1) < \ln 2$ sur $[0; 1]$ donc $u_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx \leq \int_0^1 x^n \ln 2 dx = \ln 2 \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 = \frac{\ln 2}{n+1}$.

On a donc bien $0 \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$. Comme $\frac{\ln 2}{n+1}$ tend vers 0 à l'infini, la suite converge vers 0.

1. 14. Logarithme+ expo+ acc finis

Partie A

Le but de cette partie est d'étudier la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x + \frac{2 \ln x}{x}.$$

(C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).

1. Étude de la fonction auxiliaire g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + 2 + 2 \ln x$.

a. Étudier le sens de variation de g et calculer $g(1)$.

b. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

2. a. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

c. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à (C) et étudier la position de (C) par rapport à Δ .

d. Déterminer les coordonnées du point A de (C) sachant que (C) admet en A une tangente T parallèle à Δ .

e. Tracer (C) , Δ et T dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

3. Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par Δ , la courbe (C) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 . Prouver que $\frac{1}{2} \leq x_0 \leq 1$.

Partie B

Le but de cette partie est de déterminer une valeur approchée de x_0 .

On désigne par h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

1. Montrer que x_0 est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$.

2. On note I l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Montrer que, pour tout x appartenant à I , $h(x)$ appartient aussi à I .

3. a. Calculer la dérivée h' de h et la dérivée seconde h'' de h .

b. Étudier les variations de h' sur I .

c. En déduire que, pour tout x de I , on a $|h'(x)| \leq e^{-\frac{1}{2}}$.

4. On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = h(u_n)$ pour tout entier naturel n de \mathbb{N} .

a. Montrer par récurrence que, pour tout n de \mathbb{N} : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.

b. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tout n de \mathbb{N} : $|u_{n+1} - \alpha| \leq e^{-1/2} |u_n - \alpha|$.

c. En déduire que, pour tout n de \mathbb{N} : $|u_n - x_0| \leq \frac{1}{2} e^{-\frac{n}{2}}$.

5. a. Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, on ait : $\frac{1}{2} e^{-\frac{n}{2}} < 10^{-2}$.

b. Montrer que : $|u_{n_0} - x_0| \leq 10^{-2}$. Que représente u_{n_0} relativement à x_0 ? Calculer u_{n_0} à 10^{-2} près par défaut.

Correction

Partie A

1. a. $g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2-1)}{x} = \frac{2}{x}(x-1)(x+1)$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$				3	

$g(1) = 1^2 + 2 - 2 \times 0 = 3$.

b. 3 est un minimum de la fonction g sur $]0; +\infty[$ donc la fonction g est positive quel que soit x .

2. a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{2 \ln x}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{1}{X}}{\frac{1}{X}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} (-X \ln X) = -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{2 \ln x}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

b. $f'(x) = 1 + \frac{2 \times \frac{1}{x} \times x - 2 \ln x \times 1}{x^2} = \frac{x^2 + 2 - 2 \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$ du signe de $g(x)$, c'est à dire positif!

f est donc strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

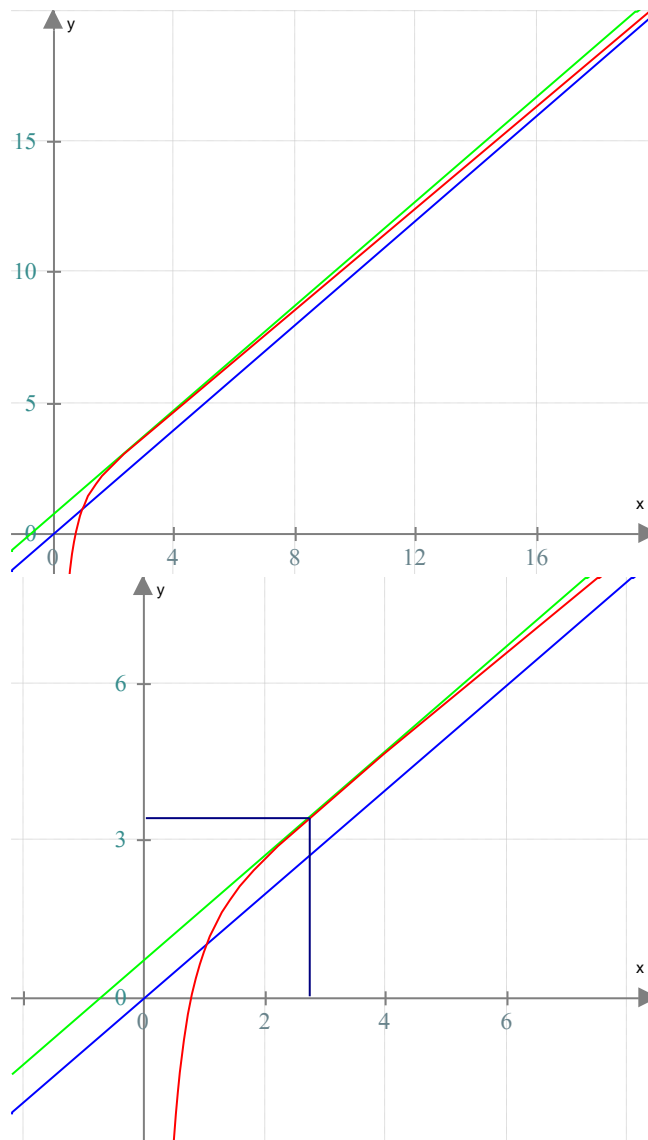
c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} = 0^+$, donc la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe. Lorsque $x <$

1 la courbe est en dessous de Δ , lorsque $x > 1$, la courbe est au-dessus.

d. (C) admet en A une tangente de coefficient directeur 1 ssi $f'(x_A) = 1$:

$f'(x_A) = 1 \Leftrightarrow \frac{g(x_A)}{x_A^2} = 1 \Leftrightarrow x_A^2 + 2 - 2 \ln x_A = x_A^2 \Leftrightarrow 2 - 2 \ln x_A = 0 \Leftrightarrow 2 \ln x_A = 2 \Leftrightarrow \ln x_A = 1 \Leftrightarrow x_A = e$;

$f(x_A) = f(e) = e + \frac{2 \ln e}{e} = e + \frac{2}{e} \approx 3,45$.



3. Il faut calculer $\int_1^e (f(x) - x) dx = 2 \int_1^e \frac{e \ln x}{x} dx$; or $\frac{1}{x}$ est la dérivée de $\ln x$, donc on a quelque chose de la

forme $u' \cdot u$ dont une primitive est $\frac{1}{2} u^2$: $\int_1^e (f(x) - x) dx = 2 \int_1^e \frac{e \ln x}{x} dx = 2 \left[\frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_1^e = 2 \left[\frac{1}{2} - 0 \right] = 1$.

4. La fonction f est continue, strictement croissante, sur $]0 ; +\infty[$, c'est donc une bijection de $]0 ; +\infty[$ sur \mathbb{R} . Il existe bien une valeur x_0 appartenant à $]0 ; +\infty[$ telle que $f(x_0) = 0$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2 \ln \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - 4 \ln 2 < 0 \text{ et } f(1) = 1 + \frac{2 \ln 1}{1} = 1 > 0 \text{ donc } \frac{1}{2} \leq x_0 \leq 1.$$

1. 15. Logarithme+primitive

L'objet de ce problème est d'étudier une fonction à l'aide d'une fonction auxiliaire et d'en déterminer une primitive.

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{x+1} - 2 \ln(x+1)$.

- Calculer $f'(x)$, étudier son signe et en déduire le tableau de variation de la fonction f .
- Calculer $f(0)$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dont l'une, que l'on désigne par α , appartient à $[-0,72 ; -0,71]$.
- Donner le signe de $f(x)$, pour x appartenant à $]-1 ; +\infty[$.

Partie B

Soit g la fonction définie sur l'ensemble $D =]-1 ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}$.

1. Étude de g aux bornes de son ensemble de définition.

- Calculer les limites de $g(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs inférieures et quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.

b. Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

2. Sens de variation de g

a. Calculer $g'(x)$ et déduire, à l'aide de la partie A, son signe.

b. Montrer que $g(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$. En déduire une valeur approchée de $g(\alpha)$ en prenant $\alpha \approx -0,715$.

3. Tableau et représentation graphique de g .

a. Dresser le tableau de variation de la fonction g .

b. Représenter graphiquement la fonction g dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).

4. Calcul d'une primitive de g :

Soit h la fonction définie sur D par : $h(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2} - \frac{1}{x(x+1)}$.

a. Déterminer des fonctions u et v telles que l'on puisse écrire $h(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$ et en déduire une primitive de h .

b. Après avoir vérifié que $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$, déterminer une primitive de $\frac{1}{x(x+1)}$.

c. Déduire des questions précédentes, une primitive de g .

Correction

Partie A

$$f(x) = \frac{x}{x+1} - 2\ln(x+1), \quad D_f =]-1; +\infty[.$$

1. f est dérivable comme somme de fonctions dérivables : en effet, $u: x \mapsto \frac{x}{x+1}$ est dérivable sur D_f et $v: x \mapsto x+1 = y \mapsto -2\ln y$ est dérivable sur D_f .

$$f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} - 2 \frac{1}{x+1} = \frac{1-2(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{-2x-1}{(x+1)^2}.$$

$$2. f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2}.$$

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$			$f(-1/2)$		
		$-\infty$			$-\infty$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{x-2(x+1)\ln(x+1)}{x+1} = -\infty \text{ car } \lim_{X \rightarrow 0} X \ln X = 0^-.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} - 2\ln(x+1) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} -2\ln(x+1) = -\infty.$$

$$f(-1/2) = \frac{-1/2}{1/2} - 2\ln \frac{1}{2} = -1 + 2\ln 2 \approx 0,39, f(0) = 0.$$

3. f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]-1; -1/2[$ et $f(x)$ change de signe sur cet intervalle ; il existe donc un nombre α de $]-1; -1/2[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

$$f(-0,71) \approx 0,027 \text{ et } f(-0,72) \approx -0,025 \text{ donc } -0,72 < \alpha < -0,71.$$

Signe de $f(x)$:

x	-1		α		0		$+\infty$
$f(x)$		-	0	+	0	-	

Partie B

$$g(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}, \quad D =]-1; 0[\cup]0; +\infty[.$$

$$1. a. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\ln(x+1)}{x} \times \frac{1}{x} = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty.$$

$$\text{De même } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(x+1)}{x} \times \frac{1}{x} = +\infty.$$

$$b. \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \frac{x+1}{x^2} = 0 \text{ car } \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2} = 0.$$

$$2. a. g'(x) = \frac{\frac{1}{x+1} \times x^2 - \ln(x+1) \times 2x}{x^4} = \frac{\frac{x}{x+1} - 2\ln(x+1)}{x^3} = \frac{f(x)}{x^3}.$$

x	-1		α		0	$+\infty$
$f(x)$		-	0	+	0	-
x^3		-		-		+
$g'(x)$		+	0	-		-

b. $g(\alpha) = \frac{\ln(\alpha+1)}{\alpha^2}$; or on sait que $f(\alpha) = 0$ donc $\frac{\alpha}{\alpha+1} - 2\ln(\alpha+1) = 0 \Leftrightarrow \ln(\alpha+1) = \frac{\alpha}{2(\alpha+1)}$.

On déduit que $g(\alpha) = \frac{\ln(\alpha+1)}{\alpha^2} = \frac{\alpha}{2(\alpha+1)} \times \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)} \approx -2,455$.

x	-1		α		0	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-		-
$g(x)$						

$-\infty \xrightarrow{\quad} \alpha \xrightarrow{\quad} -\infty \xrightarrow{\quad} +\infty \xrightarrow{\quad} 0$



4. a. $h(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2} - \frac{1}{x(x+1)}$. $u = \ln(x+1)$, $u' = \frac{1}{x+1}$, $v' = \frac{1}{x^2}$, $v = -\frac{1}{x} \Rightarrow h = uv' + u'v$.

La fonction $uv = -\frac{\ln(x+1)}{x}$ est une primitive de h .

b. $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1) - x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$ donc la fonction $\ln(x) - \ln(x+1)$ est une primitive de $\frac{1}{x(x+1)}$.

c. Une primitive de la fonction $g(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2} = h(x) + \frac{1}{x(x+1)}$ est $-\frac{\ln(x+1)}{x} + \ln x - \ln(x+1)$.

1. 16. Logarithme

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 5 cm).

Le but du problème est d'étudier certaines propriétés de la fonction f .

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) - \frac{2}{x^2 + 1}$.

- Calculer la dérivée g' de g . Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$, $g'(x) = \frac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)^2}$.
- Etudier le signe de $g'(x)$ selon les valeurs de x . Déterminer la limite de g en $+\infty$. Déterminer la limite de g en 0 .
- Dresser le tableau des variations de g .
- En déduire qu'il existe un unique nombre réel $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 0$. Vérifier que $0,5 < \alpha < 0,6$.
Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
On ne demande pas de construire la courbe représentative de la fonction g .

Partie B : Etude de la fonction f

- Calculer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $xf(x)$ (on pourra poser $X = \frac{1}{x^2}$).
 - En déduire que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$, on a $f'(x) = g(x)$. Dresser le tableau de variations de f sur $]0; +\infty[$.
- Etude de f en 0
 - Montrer que $x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 par valeurs supérieures. Que peut-on conclure ?
 - Etudier la dérivabilité de f en 0 .
 - Préciser la tangente à la courbe de f au point O .
- Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 .
- Donner l'allure de (C) .

Correction

- g est dérivable comme somme de fonctions dérivables. En effet, $\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ est dérivable comme composée de fonctions dérivables, de même que $-\frac{2}{x^2+1}$.

$$g'(x) = \frac{\frac{2x}{x^4} + \frac{2 \times 2x}{(x^2+1)^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{-2}{x^3} + \frac{4x}{(x^2+1)^2}}{\frac{x^2+1}{x^2}} = \frac{-\frac{2}{x^3} + \frac{4x}{(x^2+1)^2}}{\frac{x^2+1}{x^2}} = \frac{-2(x^2+1) + 4x^2}{x(x^2+1)^2} = \frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$

- Le signe de $g'(x)$ est celui de $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Comme g' est définie sur \mathbb{R}_+^* , on a :
si $0 < x < 1$, $g'(x)$ est négatif ;
si $x > 1$, $g'(x)$ est positif.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2+1}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \ln 1 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2+1} = 0$
donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

- $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^2+1}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$ avec
 $X = 1 + \frac{1}{x^2}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^2+1} = 2$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$.

- a.

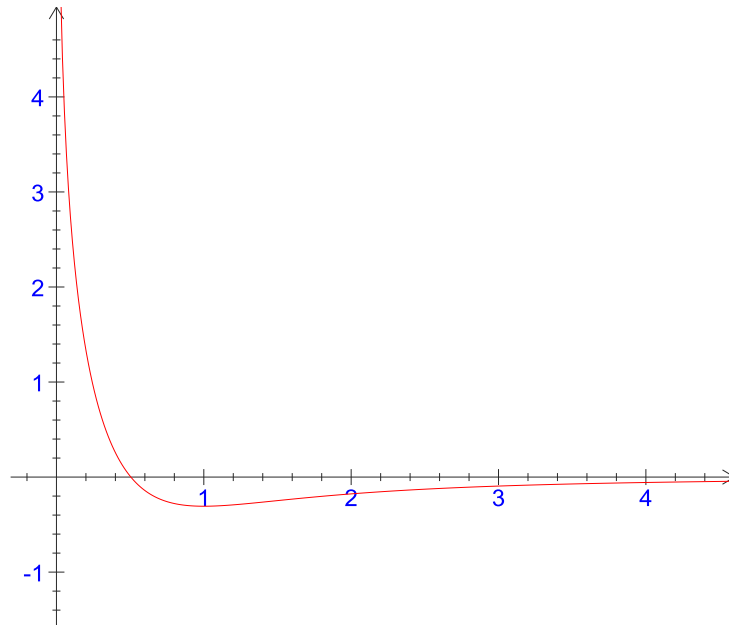
x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	0
$g(x)$	$+\infty$	-0,3	+

$$g(1) = \ln\left(1 + \frac{1}{1^2}\right) - \frac{2}{1^2+1} = \ln 2 - 1 \approx -0,3$$

- La fonction est continue et dérivable sur $]0; 1]$, de plus elle est strictement décroissante sur cet intervalle en changeant de signe, donc il existe une valeur $\alpha > 0$ telle que $g(\alpha) = 0$.

On a $g(0,5) \approx 0,009438$ et $g(0,6) \approx -0,141452$ donc $g(0,5) > 0 = g(\alpha) > g(0,6)$ et comme g est décroissante,
 $0,5 < \alpha < 0,6$.

- Pour $0 < x < \alpha$, alors $g(x)$ est positif ; pour $x > \alpha$ alors $g(x)$ est négatif.



1. a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$ (cours).

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

2. $f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$, $f'(x) = 1 \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + x \cdot \frac{\frac{2x}{x^4}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + x \cdot \frac{\frac{2}{x^3}}{\frac{x^2+1}{x^2}} = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2+1} = g(x)$.

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		$f(\alpha)$	0

3. a. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x \ln(x^2+1) - x \ln x^2)$,

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x^2+1) = 0$ car $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x^2+1) = \ln 1 = 0$.

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -x \ln x^2 = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -\frac{2 \ln x}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} +\frac{2 \ln x^{-1}}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{2 \ln \frac{1}{x}}{x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln X}{X} = 0^-$ avec $X = \frac{1}{x}$.

Conclusion : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 0$.

b. f dérivable en 0 si et seulement si la limite de son taux d'accroissement est finie.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$

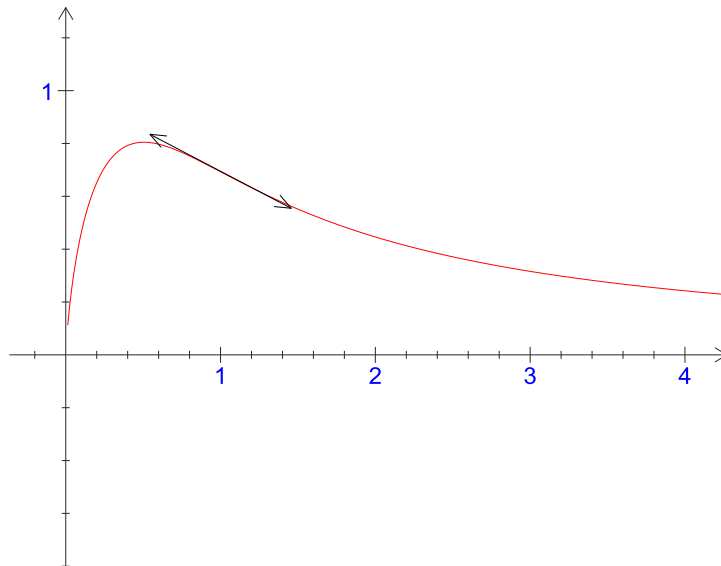
La fonction n'est donc pas dérivable en 0.

c. La tangente en 0 à f est verticale. Son équation est $x = 0$.

4. La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$: $f(1) = 1 \ln\left(1 + \frac{1}{1^2}\right) = \ln 2$,

$f'(1) = g(1) = \ln 2 - 1$ d'où $y = (\ln 2 - 1)(x-1) + \ln 2 \Leftrightarrow y = (\ln 2 - 1)x + 1$.

5.



Remarque :

On a vu dans la partie A que $g'(1) = 0$, or $g'(1) = f''(1)$, c'est-à-dire la dérivée seconde de f en 1 : la courbe admet un point d'inflexion pour $x = 1$.

1. 17. Logarithme+ asymptote+ primitives

Soit la fonction définie sur l'intervalle $I =]4 ; +\infty[$ par : $f(x) = -2x + 5 + 3 \ln \frac{x+1}{x-4}$ et (C) sa courbe

représentative dans le repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique : 1 cm.

1. Étude de f

- Étudier les limites de la fonction f aux bornes de I .
- Montrer que sur I , $f'(x)$ est strictement négatif et dresser le tableau de variation de f .
- Montrer que la droite (D) d'équation $y = -2x + 5$ est une asymptote à (C). Préciser la position de (C) par rapport à (D).

2. Tracer la courbe (C) et la droite (D) dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

- Déterminer les coordonnées du point de (C) où la tangente Δ a un coefficient directeur égal à $-\frac{9}{2}$.

Donner une équation de Δ et la tracer dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

4. Calcul d'aire

- Déterminer, à l'aide d'une intégration par parties, les primitives sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \ln x$.
- Montrer que la fonction $G : x \rightarrow (x+1) \ln(x+1) - x$ est une primitive de la fonction $g : x \mapsto \ln(x+1)$ sur I .
- Montrer que la fonction $H : x \rightarrow (x-4) \ln(x-4) - x$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto \ln(x-4)$ sur I .
- Déduire des questions précédentes le calcul de l'aire A du domaine plan délimité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = 5$ et $x = 6$.

On donnera la valeur exacte de A puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

5. Intersection de (C) et de l'axe des abscisses

- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans I une unique solution, notée x_0 .
- Déterminer graphiquement un encadrement de x_0 d'amplitude 0,5.
- À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de x_0 d'amplitude 10^{-2} . On explicitera la méthode employée.

Correction

- a. Lorsque x tend vers 4, $\frac{x+1}{x-4}$ tend vers $+\infty$ ainsi que $\ln \frac{x+1}{x-4}$ donc f tend vers $+\infty$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{x+1}{x-4}$ tend vers 1, $\ln \frac{x+1}{x-4}$ tend vers 0, $-2x+5$ tend vers $-\infty$ donc f tend vers $-\infty$.

$$b. f'(x) = -2 + 3 \left[\ln \frac{x+1}{x-4} \right]' = -2 + 3 \left[\ln(x+1) - \ln(x-4) \right]' = -2 + 3 \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-4} \right] = \frac{-2(x+1)(x-4) - 15}{(x+1)(x-4)}$$

Lorsque $x > 4$, $x+1$ est positif, $x-4$ est positif donc le numérateur est négatif et le dénominateur est positif. Moralité, f' est négative.

- $f(x) - (-2x+5) = \ln \frac{x+1}{x-4}$; nous avons dit que ce terme tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ donc la

droite (D) est une asymptote à (C). Lorsque $x > 4$, $\frac{x+1}{x-4} > 0$ donc (C) est au-dessus de (D).

2. a. On pose $u = \ln x, v' = 1 \Rightarrow u' = \frac{1}{x}, v = x$ d'où une primitive de $\ln x$ est $x \ln x - \int \frac{1}{x} dx = x \ln x - x$.

b. On dérive $G : G'(x) = 1 \cdot \ln(x+1) + (x+1) \frac{1}{x+1} - 1 = \ln(x+1)$.

c. Exactement pareil.

c. On cherche $A = \int_5^6 f(x) - (-2x+5) dx = \int_5^6 \ln(x+1) - \ln(4-x) dx = [G(6) - G(5)] - [H(6) - H(5)]$;

$$G(6) - G(5) = 7 \ln 7 - 6 - 6 \ln 6 + 5 = 7 \ln 7 - 6 \ln 6 - 1,$$

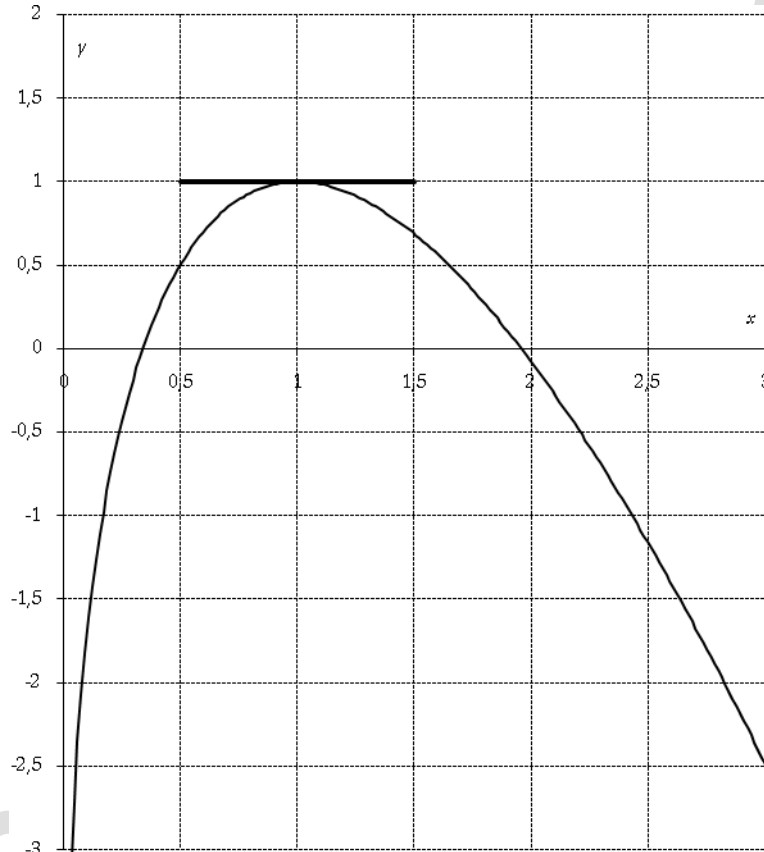
$$H(6) - H(5) = 2 \ln 2 - 6 - 1 \ln 1 + 5 = 2 \ln 2 - 1,$$

et le résultat $A = 7 \ln 7 - 6 \ln 6 - 2 \ln 2 \approx 1,48$ U.

1. 18. Fonction inconnue

Partie A

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = ax + (bx + c) \ln x$ avec a, b et c des réels. La courbe (C) de f est donnée ci-dessous.



En utilisant ce graphique et en sachant que $f(2) = 2 - 3 \ln 2$, justifier que l'on a $a = c = 1$ et $b = -2$.

Partie B

On considère alors la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x + (1 - 2x) \ln x$.

1. a. Déterminer la limite de g en 0.

b. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2. a. Déterminer la fonction dérivée de g .

b. Etudier, pour x dans $]0; +\infty[$, le signe de $-2 \ln x$ et celui de $\frac{1-x}{x}$. En déduire le signe de $g'(x)$ et les variations de g .

3. Dresser le tableau complet des variations de g .

4. Soit la droite Δ d'équation $y = x$.

a. Résoudre dans \square l'équation $(1 - 2x) \ln x = 0$ et donner une interprétation graphique des solutions.

b. Etudier la position de la courbe représentative de g par rapport à Δ .

Correction

Partie A

$f(2) = 2 - 3 \ln 2 \Rightarrow 2a + (2b + c) \ln 2 = 2 - 3 \ln 2$; par ailleurs la dérivée s'annule en 1 et $f(1) = 1$:

$$f'(x) = a + b \ln x + \frac{bx + c}{x} \Rightarrow a + 0 + \frac{b+c}{1} = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0 ; f(1) = a + 0 = a = 1.$$

On a donc $2+(2b+c)\ln 2=2-3\ln 2 \Leftrightarrow 2b+c=-3$; avec $1+b+c=0$ on tire $c=1$ et $b=-2$.

Partie B

1. a. En 0, $\ln x$ tend vers $-\infty$, donc g tend vers $-\infty$.

b. Mettons x en facteur : $g(x) = x \left[1 + \left(\frac{1}{x} - 2\right) \ln x \right] \rightarrow +\infty [1 + (0 - 2) + \infty] = -\infty$.

2. a. $g'(x) = 1 - 2\ln x + \frac{1-2x}{x} = \frac{x-2x\ln x + 1-2x}{x} = \frac{1-x-2x\ln x}{x}$.

b. $-2\ln x$ change de signe en 1, de même que $\frac{1-x}{x}$ puisque x est positif. La dérivée est constituée de deux morceaux qui changent de signe au même endroit : avant 1 elle est positive, après 1 elle est négative.

3.

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0 -	
$g(x)$		1	
	$-\infty$		$-\infty$

4. a. $(1-2x)\ln x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x=0 \\ \ln x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = 1$: la courbe coupe la droite Δ en ces deux points.

b. $g(x) - x = (1-2x)\ln x$ est positif sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$: C au-dessus de Δ ; sinon C est en dessous de Δ .

1. 19. Une fonction assez simple

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$f(x) = \frac{\ln x + xe}{x^2}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 2 cm.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R}_+ par : $g(x) = -2\ln x - xe + 1$.

- Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
- Etudier le sens de variation de g .
- Montrer que dans $[0,5; 1]$ l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dont on déterminera une valeur approchée à 10^{-2} près.
- En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B : Etude de la fonction f

- Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- Etudier le sens de variation de f .

3. Montrer que $f(\alpha) = \frac{1+\alpha e}{2\alpha^2}$ et en donner une valeur approchée à 10^{-1} près.

4. Donner le tableau de variation de f .

5. Tracer (C).

Correction

A. 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2\ln x - xe + 1) = -2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - e \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = -\infty$,

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-2\ln x - xe + 1) = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \ln x - e \lim_{x \rightarrow 0} x + 1 = +\infty$.

2. $g'(x) = -2 \times \frac{1}{x} - e = \frac{-2 - ex}{x}$ du signe de $-2 - ex$; $-2 - ex > 0 \Leftrightarrow x < -2/e$ ce qui est impossible

puisque x est positif. La fonction g' est donc négative quel que soit x positif. Donc la fonction g est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+ .

3. $g(0,5) \approx 1,027$ et $g(1) \approx -1,718$ (à la calculatrice). La fonction g est continue, strictement décroissante, et change de signe sur l'intervalle $[0,5; 1]$ donc il existe une valeur unique α de cet intervalle telle que $g(\alpha) = 0$. A la calculatrice : $\alpha \approx 0,67$.

4. On en déduit que, quel que soit $x < \alpha$ on a $g(x)$ positif, et $x > \alpha$, $g(x)$ négatif.

B. 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + xe}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{x} = 0$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{x} = 0$.

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x + xe}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(\frac{\ln x}{x} + e \right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln x}{x} + e}{x} = -\infty$.

2. f est dérivable sur son domaine de définition.

$$f(x) = \frac{\ln x + xe}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{e}{x}, \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln x \times 2x}{x^4} - \frac{e}{x^2} = \frac{x - 2x \ln x - ex^2}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x - ex}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}.$$

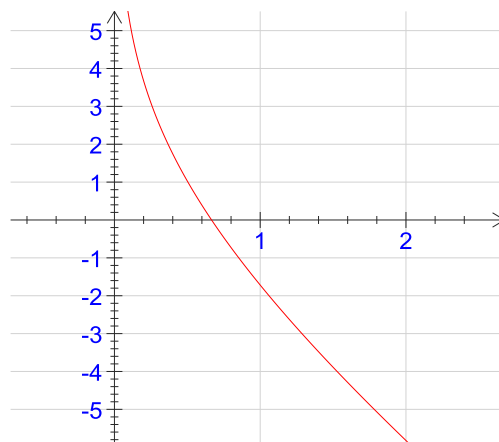
f' est donc du signe de g car x^3 est strictement positif sur $]0; +\infty[$.

Par conséquent, f' est positive quel que soit x inférieur à α et négative ailleurs et donc f croissante sur $]0; \alpha[$ et décroissante sur $] \alpha; +\infty[$.

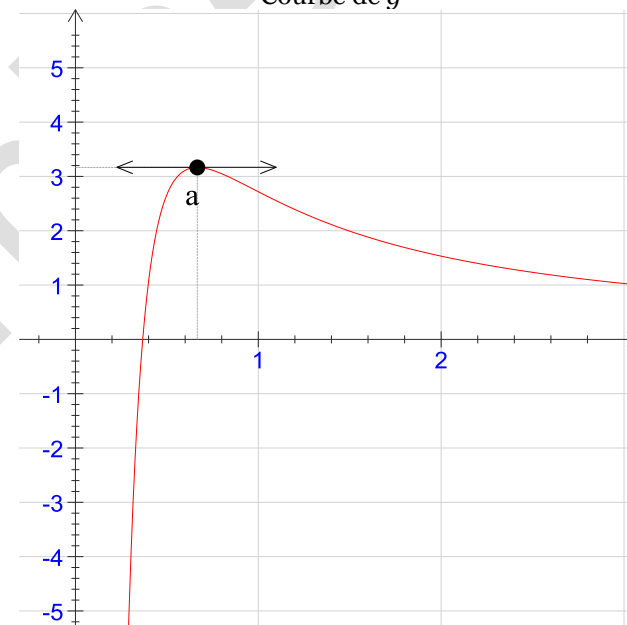
3. On sait que $g(\alpha) = 0$ c'est-à-dire que $1 - 2 \ln \alpha - e\alpha = 0$ ou encore $\ln \alpha = \frac{1 - e\alpha}{2}$, soit

$$f(\alpha) = \frac{\ln \alpha + e\alpha}{\alpha^2} = \frac{\frac{1 - e\alpha}{2} + e\alpha}{\alpha^2} = \frac{1 + \alpha e}{2\alpha^2} \approx 3,165 \approx 3,2.$$

x	0	α	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$			$f(\alpha)$	
		$-\infty$		0



Courbe de g



Courbe de f

1. 20. Logarithmes

7 points

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = -2x^2 - 1 + \ln x$.

1. Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$. Étudier son signe sur $]0; +\infty[$.

2. Dresser le tableau de variations de g sur $]0 ; +\infty[$. (On ne demande pas les limites de g aux bornes de son ensemble de définition).

3. En déduire que pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $g(x) < 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = -x + 1 - \frac{1}{2} \frac{\ln x}{x}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

- Calculer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
- Calculer la limite de f en $+\infty$.
- Démontrer que la droite Δ d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à la courbe C .
- Étudier la position relative de C et Δ sur $]0 ; +\infty[$.

2. a. Calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$.

b. Vérifier que pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$.

c. Déduire de la partie A. le tableau de variations de f sur $]0 ; +\infty[$.

d. Calculer $f(1)$. En déduire le signe de f sur $]0 ; +\infty[$.

3. Dans le plan muni du repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, tracer la droite Δ et la courbe C .

Partie C (version 1)

1. Vérifier que la fonction F définie sur $]0 ; +\infty[$ par $F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{4}(\ln x)^2$ est une primitive de f .

2. Calculer l'intégrale $I = \int_1^e f(x) dx$ (on donnera la valeur exacte).

3. a. Hachurer sur le graphique la partie E du plan limitée par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

b. Déduire de la question 2. de la partie C. la valeur exacte de l'aire S de E en cm^2 , puis en donner la valeur arrondie en cm^2 , au mm^2 près.

Partie C (version 2)

1. Démontrer qu'il existe une unique tangente à C parallèle à Δ , préciser les coordonnées du point de contact J et l'équation de cette tangente T . Tracer T dans le repère précédent.

2. Soit x un réel supérieur ou égal à 1. M et N sont les points d'abscisse x situés respectivement sur C et sur Δ .

a. Préciser, en fonction de x , la valeur de la distance MN .

b. Etudier sur $[1 ; +\infty[$ les variations de la fonction h définie sur $[1 ; +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{2} \frac{\ln x}{x}$.

c. Déduire des questions précédentes que la distance MN est maximale lorsque M est en J et préciser la valeur de cette distance maximale.

Correction

Partie A

1. $g(x) = -2x^2 - 1 + \ln x$, $g'(x) = -4x + \frac{1}{x} = \frac{1-4x^2}{x} = \frac{(1-2x)(1+2x)}{x}$. Sur $]0 ; +\infty[$ seul le terme $1-2x$

change de signe : positif avant $1/2$, négatif après $1/2$.

2.

x	0	1/2	$+\infty$
$g'(x)$	+		-
$g(x)$		$-\frac{3}{2} - \ln 2$	

3. Le maximum de g est $-\frac{3}{2} - \ln 2$ donc $g(x) \leq g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} - \ln 2 < 0$.

Partie B

1. a. $f(x) = -x + 1 - \frac{1}{2} \frac{\ln x}{x}$; $\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \ln x$; or en 0 $\ln x$ tend vers $-\infty$ et $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$. Conclusion, f tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 ; la droite $x = 0$ est asymptote de C .

b. On sait que $\frac{\ln x}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ donc f tend vers $-\infty$ car $-x + 1$ tend vers $-\infty$.

c. $f(x) - (-x+1) = -x+1 - \frac{1}{2} \frac{\ln x}{x} + x - 1 = -\frac{1}{2} \frac{\ln x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc la droite Δ $y = -x+1$ est asymptote à la courbe C.

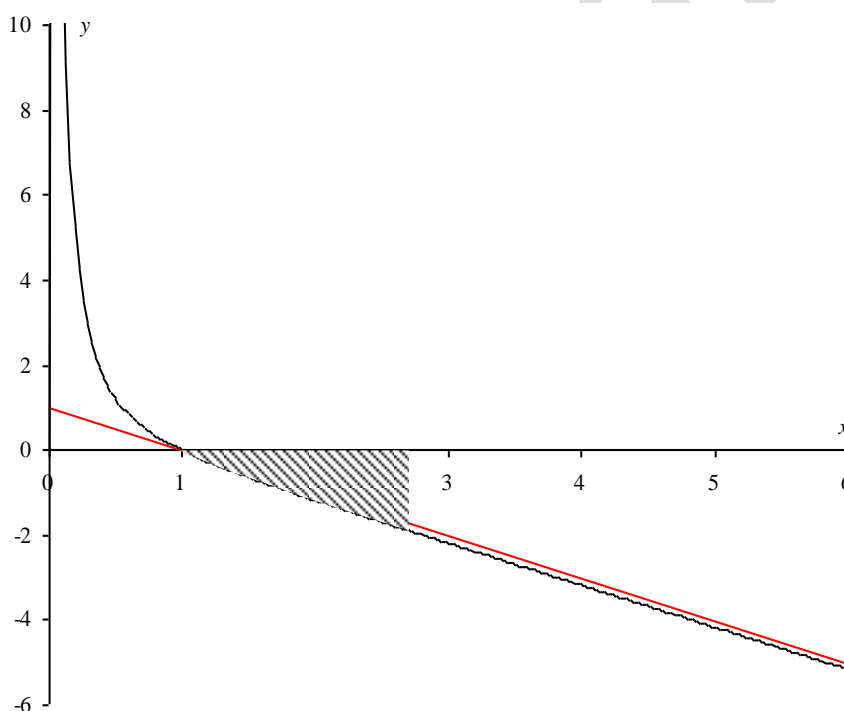
d. Lorsque $x > 1$, $-\frac{1}{2} \frac{\ln x}{x} < 0$ car $\ln x > 0$. Donc sur $]1; +\infty[$ C est au-dessus de Δ ; sur $]0; 1]$ C est en dessous de Δ .

2. a. b. c. $f'(x) = -1 - \frac{1}{2} \frac{x - \ln x}{x^2} = \frac{-2x^2 - 1 + \ln x}{2x^2} = \frac{g(x)}{2x^2}$. Donc f est négative et f décroissante.

x	0	1	$+\infty$
f(x)		-	
f'(x)	$+\infty$	0	$-\infty$

d. $f(1) = 0$: lorsque x est inférieur à 1, $f(x) > f(1) = 0$ car f est décroissante. Lorsque x est supérieur à 1, $f(x) < f(1) = 0$.

3.



Partie C (version 1)

1. $F'(x) = -\frac{1}{2}(2x) + 1 - \frac{1}{4} \left(2 \frac{1}{x} \ln x \right) = -x + 1 - \frac{1}{2} \frac{\ln x}{x} = f(x)$: F est une primitive de f .

2. $I = \int_1^e f(x) dx = F(e) - F(1) = \left[-\frac{1}{2}e^2 + e - \frac{1}{4}(\ln e)^2 \right] - \left[-\frac{1}{2}1^2 + 1 - \frac{1}{4}(\ln 1)^2 \right] = -\frac{1}{2}e^2 + e - \frac{3}{4} \approx -1,726$.

3. b. L'unité d'aire est $1 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} = 2 \text{ cm}^2$; on prend la valeur absolue de l'intégrale multipliée par l'unité d'aire, ce qui nous fait $e^2 - 2e + \frac{3}{2}$, soit environ $3,45 \text{ cm}^2$ au mm^2 près.

Partie C (version 2)

1. Pour avoir une tangente parallèle à Δ , il faut trouver x tel que $f'(x) = -1$, soit $\frac{-2x^2 - 1 + \ln x}{2x^2} = -1 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$. L'ordonnée est alors $f(e) = -e + 1 - \frac{1}{2e}$; l'équation de T est

$$y = -x + e - e + 1 - \frac{1}{2e} = -x + 1 - \frac{1}{2e}.$$

2. a. Comme C est en dessous de Δ , on a $MN = (-x+1) - f(x) = \frac{1}{2} \frac{\ln x}{x} = h(x)$.

b. $h'(x) = \frac{1}{2} \frac{1 - \ln x}{x^2}$ qui change de signe en $x = e$; la distance MN est maximale lorsque M est en J et

cette distance vaut $h(e) = \frac{\ln e}{2e} = \frac{1}{2e}$.

1. 21. Ln+second degré+intégrale, Antilles 2001

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère la fonction f , définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = -3 - \ln x + 2(\ln x)^2.$$

On note (C) sa courbe représentative.

Partie A - Étude de la fonction f et tracé de la courbe (C)

1. a. Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'équation $f(x) = 0$. (On pourra poser $\ln x = X$).

b. Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'inéquation $f(x) > 0$.

2. a. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b. Calculer $f'(x)$.

c. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.

3. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $e^{\frac{5}{4}}$.

4. Tracer la courbe (C) et la droite (T) . (Unité graphique : 2 cm sur chaque axe.)

Partie B - Calcul d'une aire

1. Restitution organisée des connaissances :

Démontrer que la fonction h , définie par $h: x \mapsto x \ln x - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0; +\infty[$ (attention on ne demande pas simplement de le vérifier...)

2. On pose $I_1 = \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{3}{e^2}} \ln x dx$ et $I_2 = \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{3}{e^2}} (\ln x)^2 dx$.

a. Calculer I_1 .

b. Montrer que $I_2 = \frac{5}{4}e^{\frac{3}{e^2}} - \frac{5}{e}$.

c. Calculer $I = \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{3}{e^2}} f(x) dx$. En déduire l'aire, en unités d'aire, de l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan

tels que $\frac{1}{e} \leq x \leq e^{\frac{3}{e^2}}$ et $f(x) \leq y \leq 0$.

Correction

Partie A $f(x) = -3 - \ln x + 2(\ln x)^2$.

1. a. $f(x) = -3 - \ln x + 2(\ln x)^2 = 0$: on pose $X = \ln x$ d'où $-3 - X + 2X^2 = 0 \Rightarrow X_1 = -1, X_2 = \frac{3}{2}$ d'où

$x = e^{-1}$ ou $x = e^{\frac{3}{2}}$.

b. $-3 - X + 2X^2 > 0 \Leftrightarrow X = \ln x \in]-\infty; -1[\cup]\frac{3}{2}; +\infty[\Leftrightarrow x \in]0; e^{-1}[\cup]e^{\frac{3}{2}}; +\infty[$.

2. a. Toujours avec $X = \ln x$, lorsque x tend vers 0, X tend vers $-\infty$ donc $-3 - X + 2X^2$ se comporte comme $2X^2$ qui tend vers $+\infty$; lorsque x tend vers $+\infty$, X tend vers $+\infty$ donc $-3 - X + 2X^2$ se comporte comme $2X^2$ qui tend vers $+\infty$.

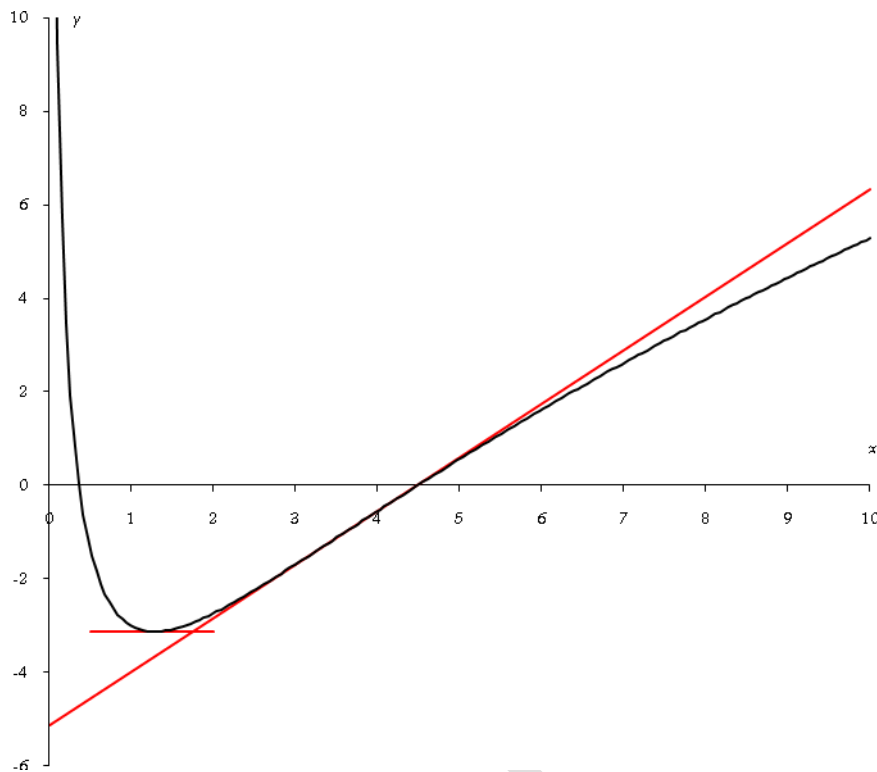
b. $f'(x) = -\frac{1}{x} + 2 \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x = \frac{-1 + 4 \ln x}{x}$.

c. f est croissante lorsque $4 \ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > \frac{1}{4} \Leftrightarrow x > e^{\frac{1}{4}}$. $f(e^{1/4}) = -3 - \frac{1}{4} + 2 \frac{1}{16} = -\frac{25}{8}$.

x	0	$e^{\frac{1}{4}}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Variation de f	$+\infty$	$-\frac{25}{8}$	$+\infty$

$$3. f\left(\frac{5}{4}\right) = -3 - \frac{5}{4} + 2 \frac{25}{16} = \frac{-24 - 10 + 25}{8} = -\frac{9}{8}; f'\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{-1 + 4 \frac{5}{4}}{e^{5/4}} = 4e^{-5/4}; y = 4e^{-5/4} \left(x - e^{5/4}\right) - \frac{9}{8}.$$

4.



Partie B

1. Restitution organisée des connaissances : on fait une intégration par parties en posant $u' = 1$ et $v = \ln x$ d'où on tire $\int \ln x dx = x \ln x - \int x \times \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x$.

2. On pose $I_1 = \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{3}{e^2}} \ln x dx$ et $I_2 = \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{3}{e^2}} (\ln x)^2 dx$.

$$a. I_1 = \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{3}{e^2}} \ln x dx = [x \ln x - x]_{1/e}^{3/e^2} = e^2 \frac{3}{2} - e^2 - \frac{1}{e}(-1) + \frac{1}{e} = \frac{1}{2} e^2 + \frac{2}{e}.$$

b. $I_2 = \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{3}{e^2}} (\ln x)^2 dx$: intégration par parties en posant $u' = 1$ et $v = (\ln x)^2$, soit $u = x$, $v' = 2 \frac{1}{x} \ln x$, soit

$$I_2 = \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{3}{e^2}} (\ln x)^2 dx = [x (\ln x)^2]_{1/e}^{3/e^2} - \int_{1/e}^{3/e^2} 2 \ln x dx = e^2 \frac{9}{4} - \frac{1}{e} - 2I_1 = \frac{9}{4} e^2 - \frac{1}{e} - e^2 - \frac{4}{e} = \frac{5}{4} e^2 - \frac{5}{e}.$$

$$c. I = \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{3}{e^2}} -3 - \ln x + 2(\ln x)^2 dx = -3 \left(e^2 - \frac{1}{e} \right) - I_1 + 2I_2 = -3e^2 + \frac{3}{e} - \left(\frac{1}{2} e^2 + \frac{2}{e} \right) + 2 \left(\frac{5}{4} e^2 - \frac{5}{e} \right) = -e^2 - \frac{9}{e}.$$

Comme on a pu le remarquer les bornes $\frac{1}{e} \leq x \leq e^2$ correspondent précisément aux valeurs de x pour lesquelles f s'annule. La valeur de I est négative car f est négative sur cet intervalle ; on a donc l'aire, en unités d'aire, égale à $-I = e^2 + \frac{9}{e} \approx 7,8$.

1. 22. Ln et calculatrice, N. Caledonie 2005 6 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 2, 2x + 2, 2 \ln(x+1)$.

1. Faire apparaître sur l'écran de la calculatrice graphique la courbe représentative de cette fonction dans la fenêtre $-2 \leq x \leq 4$, $-5 \leq y \leq 5$.

Reproduire sur la copie l'allure de la courbe obtenue grâce à la calculatrice.

2. D'après cette représentation graphique, que pourrait-on conjecturer :

a. Sur les variations de la fonction f ?

b. Sur le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$?

3. On se propose maintenant d'étudier la fonction f .

a. Étudier le sens de variation de la fonction f .

b. Étudier les limites de la fonction f en -1 et en $+\infty$, puis dresser le tableau de variations de f .

c. Déduire de cette étude, en précisant le raisonnement, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

d. Les résultats aux questions 3. a. et 3. c. confirment-ils les conjectures émises à la question 2.?

4. On veut représenter, sur l'écran d'une calculatrice, la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-0,1 ; 0,2]$, de façon à visualiser les résultats de la question 3.

a. Quelles valeurs extrêmes de l'ordonnée y proposez-vous pour mettre en évidence les résultats de la question 3. c. dans la fenêtre de votre calculatrice ?

b. À l'aide de la calculatrice déterminer une valeur approchée par défaut à 10^{-2} près de la plus grande solution α de l'équation $f(x) = 0$.

5. Soit F la fonction définie sur $]-1 ; +\infty[$ par $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 1,1x^2 - 2,2x + 2,2(x+1)\ln(x+1)$.

a. Démontrer que F est une primitive de f sur $]-1 ; +\infty[$.

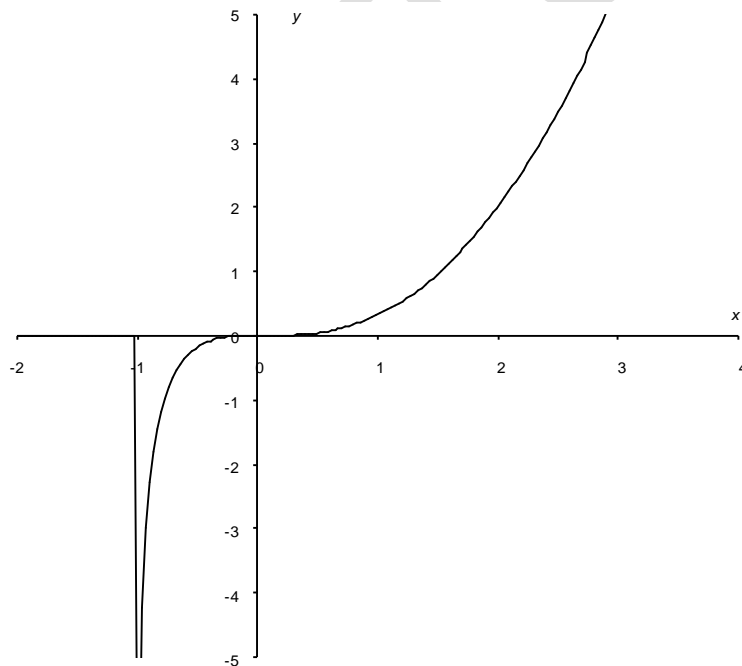
b. Interpréter graphiquement l'intégrale $\int_0^\alpha f(x)dx$

c. Calculer $\int_0^\alpha f(x)dx$ et exprimer le résultat sous la forme $b\alpha^3 + c\alpha^2$ (b et c réels).

Correction

f sur $]-1 ; +\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 2,2x + 2,2\ln(x+1)$.

1.



2. a. f semble croissante.

b. Il semble n'y avoir qu'une solution à l'équation $f(x) = 0$, mais c'est douteux.

3. a. $f'(x) = 2x - 2,2 + \frac{2,2}{x+1} = \frac{2x^2 + 2x - 2,2x - 2,2 + 2,2}{x+1} = \frac{2x^2 - 0,2x}{x+1} = \frac{x(2x - 0,2)}{x+1}$; on a deux racines, 0 et

0,1 ; le signe du trinôme donne f croissante avant 0, décroissante entre 0 et 0,1 puis de nouveau croissante.

b. En -1 , $\ln(x+1)$ tend vers $-\infty$ de même que f ; en $+\infty$ les croissances comparées donnent le terme x^2 gagnant et f tend vers $+\infty$.

c. f s'annule donc deux fois : en 0 évidemment puis une deuxième fois après 0,1 puisque f est croissante entre 0,1 et $+\infty$ et passe d'un nombre négatif à des valeurs positives.

x	-1	0	$0,1$	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	0
f		0		$+\infty$
	$-\infty$		$-0,000$	

d. Evidemment non...

4. a. Le minimum est aux environs de $-0,0003$, et on peut prendre $f(0,2) \approx 0,0011$ en positif.

b. On a $\alpha \approx 0,1517$, soit $0,15$ à 10^{-2} près.

5. $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 1,1x^2 - 2,2x + 2,2(x+1)\ln(x+1)$.

a. On dérive F :

$$F'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 1,1 \cdot 2x - 2,2 + 2,2 \left[1 \cdot \ln(x+1) + (x+1) \frac{1}{x+1} \right] = x^2 - 2,2x - 2,2 + 2,2 \ln(x+1) + 2,2 = f(x).$$

b. $\int_0^\alpha f(x)dx$ représente l'aire algébrique (ici négative) comprise entre la courbe de f , les droites $x = 0$ et $x = \alpha$.

c. $\int_0^\alpha f(x)dx = F(\alpha) - F(0) = \frac{1}{3}\alpha^3 - 1,1\alpha^2 - 2,2\alpha + 2,2(\alpha+1)\ln(\alpha+1)$; comme $f(\alpha) = 0$, on a

$$\alpha^2 - 2,2\alpha + 2,2 \ln(\alpha+1) = 0 \Leftrightarrow 2,2 \ln(\alpha+1) = 2,2\alpha - \alpha^2,$$

soit

$$\int_0^\alpha f(x)dx = \frac{1}{3}\alpha^3 - 1,1\alpha^2 - 2,2\alpha + (\alpha+1)(2,2\alpha - \alpha^2) = -\frac{2}{3}\alpha^3 + 0,1\alpha^2.$$