Liste d'exercices : Fonctions exponentielles

Exercice 1 :

A/Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

(C_f) désigne la courbe de f dans un repère orthonormé $(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. a) Dresser le tableau de variation de f.
   b) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$.
2. a) Montrer que f est impaire.
   b) Ecrire une équation de la tangente Δ à (C_f) au point 0.
   c) Etudier la position de (C_f) par rapport à Δ.
3. Tracer (C_f) et $(C_{f^{-1}})$.
4. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la région du plan limité par (C_f) l'axe des abscisses et les droites : $x = -1$ et $x = 0$.

B/Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^{lnx} f(t)\, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $F'(x) = \dfrac{x-1}{x(x+1)}$.
2. a) Calculer $F(1)$, déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{t-1}{t(t+1)}\, \mathrm{d}t$.
   b) Expliciter $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Retrouver $\mathscr{A}$.
   c) Dresser le tableau de variation de F.

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1 + e^x}$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
   b) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et montrer que $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$.Interpréter graphiquement les résultats.
2. a) Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = -\dfrac{(2 + e^{-x}}{(1 + e^x)^2}$.
   b) Dresser le tableau de variation de f.
3. a) Justifier que la tangente (T) à la courbe C_f au point d'abscisse 0 a pour équation $y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{2}$.
   b) Utiliser le tableau de signe ci-dessous pour préciser la position relative de C_f et (T).

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x) + \dfrac{3}{4}$		$-$	0	$+$	

   c) Tracer (T) et C_f.
4. Soit λ un réel strictement positif. On désigne par $\mathscr{A}_\lambda$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f, les axes du repère et la droite d'équation $x = \lambda$.
   a) Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = e^{-x} - \dfrac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$.
   b) Montrer que $\mathscr{A}_\lambda = -e^{-\lambda} + ln(1 + e^\lambda) + 1 - ln2$.
   c) Calculer $\lim_{\lambda\to+\infty} \mathscr{A}_\lambda$.

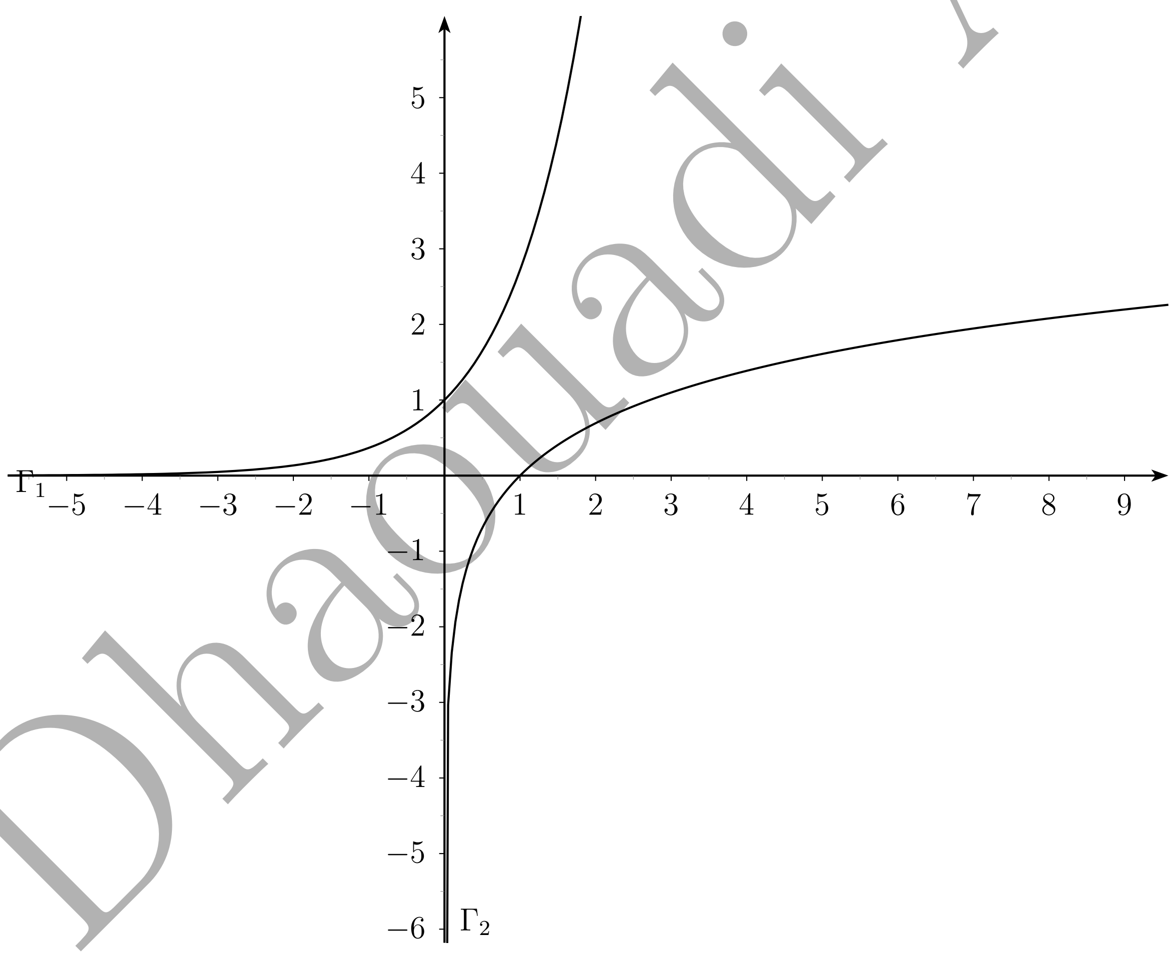
Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = e^{\sqrt[3]{x}}$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Dans l'annexe 1 on a représenter les courbes Γ_1 et Γ_2 d'équation respective $y = e^x$ et $y = lnx$.
   a) Déterminer les points d'intersections de C_f et Γ_1.
   b) Montrer que C_f est au dessus de Γ_1.
   c) Construire la demi-tangente à C_f au point d'abscisse 1.
   d) Construire C_f.
4. On se propose de déterminer l'aire de la partie du plan limitée par C_f et Γ_1.
   a) Montrer que f réalise une bijection de $[0, 1]$ sur un intervalle J à préciser.
   b) Tracer C' la courbe de la fonction réciproque de f.
   c) Montrer que $f^{-1}(x) = ln^3(x)$ pour tout $x \in J$.
   d) Calculer $\int_1^e ln^3(x)\, dx$.
   e) Conclure.

Annexe 1



Exercice 4 :

Soit la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases} f_n(x) = xe^{-\dfrac{1}{nx}} \; si \; x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$ On désigne par C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. a) Etudier la dérivabilité de f_n à droite en 0.

   b) Montrer que f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $f_n' = \dfrac{(nx+1)}{nx} e^{-\dfrac{1}{nx}}$.

   c) Dresser le tableau de variation de f_n.
2. a) Dresser le tableau de variation de la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = e^{-x} - 1 + x$.

   b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+ : 0 \leq 1 - e^{-x} \leq x$.

   c) Montrer alors tout $t \in \mathbb{R}_+ : 0 \leq e^{-t} - (1-t) \leq \dfrac{t^2}{2}$.
3. a) En utilisant 2.c), montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* : 0 \leq f_n(x) - (x - \dfrac{1}{n}) \leq \dfrac{1}{2n^2x}$.

   b) En déduire que la droite $D_n : y = x - \dfrac{1}{n}$ est une asymptote à C_n au voisinage de $+\infty$.

   c) Préciser la position relative de D_n et C_n.

   d) Tracer D_1 et C_1 et préciser la tangente à C_1 au point d'abscisse 0.
4. a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet un unique solution α_n dans $]0, +\infty[$.

   b) Montrer que α_n est aussi solution de l'équation : $xlnx = \dfrac{1}{n}$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^* : \alpha_n \geq 1$.
5. Monter que la fonction h définie sur $[1, +\infty[$ par $h(x) = xlnx$, réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}_+$.
6. Montrer que la suite (α_n) est décroissante et en déduire qu'elle converge et calculer sa limite.