Exercice 1

Description de la figure dans l'espace muni du repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$:

ABCDEFGH désigne un cube de côté 1.

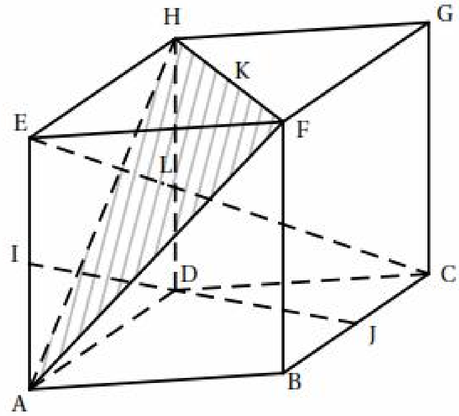
On appelle $\mathscr{P}$ le plan (AFH).

Le point I est le milieu du segment [AE],

le point J est le milieu du segment [BC],

le point K est le milieu du segment [HF],

le point L est le point d'intersection de la droite (EC) et du plan $\mathscr{P}$.



1. **a.** Les droites (IJ) et (EC) sont strictement parallèles.
   b. Les droites (IJ) et (EC) sont non coplanaires.
   c. Les droites (IJ) et (EC) sont sécantes.
   d. Les droites (IJ) et (EC) sont confondues.
2. **a.** Le produit scalaire $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BG}$ est égal à 0.
   b. Le produit scalaire $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BG}$ est égal à (-1).
   c. Le produit scalaire $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BG}$ est égal à 1.
   d. Le produit scalaire $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BG}$ est égal à 2.
3. Dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$:
   a. Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $x+y+z-1=0$
   b. Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $x-y+z=0$.
   c. Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $-x+y+z=0$.
   d. Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $x+y-z=0$.
4. **a.** $\overrightarrow{EG}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.
   b. $\overrightarrow{EL}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.
   c. $\overrightarrow{IJ}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.
   d. $\overrightarrow{DI}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.
5. **a.** $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$.
   b. $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AK}$.
   c. $\overrightarrow{ID}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$.
   d. $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$.

Exercice 2

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35 % des plants proviennent de l'horticulteur H_1, 25 % de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3. Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.
La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80 % de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50 % et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30 %.

1. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.
   On envisage les événements suivants :
   — H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 »,
   — H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 »,
   — H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 »,
   — C : « l'arbre choisi est un conifère »,
   — F : « l'arbre choisi est un arbre feuillu ».

   a. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.
   b. Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3.
   c. Justifier que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,525.
   d. L'arbre choisi est un conifère.
   Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ? On arrondira à 10^{-3}.

2. On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.

   On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

   a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   b. Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères ? On arrondira à 10^{-3}.

   c. Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus ? On arrondira à 10^{-3}.

Exercice 2

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{x}.$$

1. Étude d'une fonction

a. Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1.$$

Étudier le sens de variation de la fonction g.

b. Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0\,;\,+\infty[$ tel que $g(a) = 0$.

Démontrer que a appartient à l'intervalle $[0{,}703\,;\,0{,}704[$.

c. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. Étude de la fonction f

a. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

b. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Démontrer que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

c. En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

d. Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel $m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$.

e. Justifier que $3,43 < m < 3,45$.

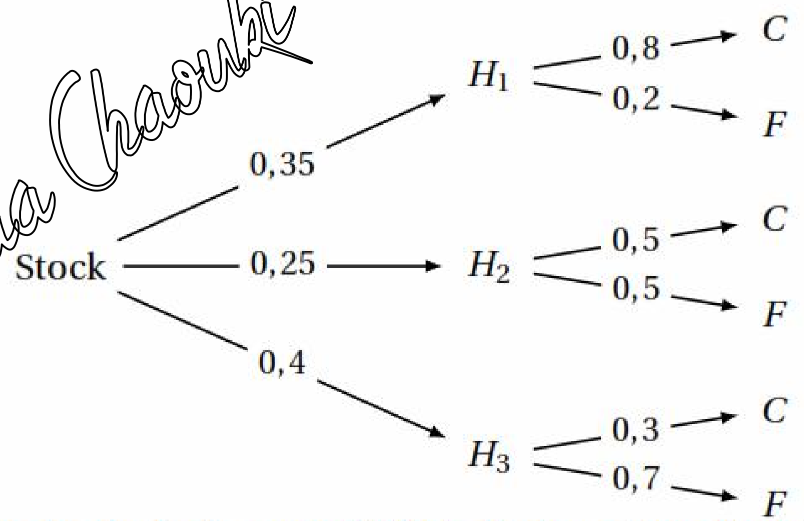
Exercice 1

1. La bonne réponse est $\boxed{\text{b}}$.
   Par l'absurde : si (IJ) et (EC) étaient coplanaires, alors, le point J appartiendrait au plan (ECI) c'est-à-dire au plan (ECA), ce qui est faux.
2. La bonne réponse est $\boxed{\text{c}}$.
   Dans le repère mentionné dans le sujet, on a $\overrightarrow{AF}\,(1\,;\,0\,;\,1)$ et $\overrightarrow{BG}\,(0\,;\,1\,;\,1)$, d'où
   $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BG} = 1\times 0+0\times 1+1\times 1 = 1$.
3. La bonne réponse est $\boxed{\text{d}}$. On le vérifie en injectant les coordonnées des points A, F et H dans l'équation $x+y-z=0$.
4. La bonne réponse est $\boxed{\text{b}}$.
   Un vecteur normal de $\mathscr{P}$ est $\overrightarrow{n}\,(1\,;\,1\,;\,-1)$, or $\overrightarrow{EC}\,(1\,;\,1\,;\,-1)$. Par conséquent $\overrightarrow{EC}$ est normal à $\mathscr{P}$, et comme $\overrightarrow{EL}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont colinéaires, $\overrightarrow{EL}$ est de ce fait aussi normal à $\mathscr{P}$.
5. La bonne réponse est $\boxed{\text{d}}$.
   On a $\overrightarrow{EC}\,(1\,;\,1\,;\,-1)$ et $E(0\,;\,0\,;\,1)$; une représentation paramétrique de la droite (EC) est donc $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& t\\ y &=& t \quad (t\in\mathbb{R})\\ z &=& 1-t\end{array}\right.$. Le point L a donc pour coordonnées $L(t\,;\,t\,;\,1-t)$, et comme $L\in\mathscr{P}$ alors : $t+t-(1-t)=0$ d'où l'on tire $t=\frac{1}{3}$, c'est-à-dire $L\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$, d'où le résultat.

Exercice 2

Puisque le choix de l'arbre se fait au hasard dans le stock de la jardinerie, on assimile les proportions données à des probabilités.

1. **a.** L'arbre pondéré traduisant cette situation est :



   b. On cherche à calculer la probabilité de l'intersection $H_3\cap C$, donc :
   $P(H_3\cap C) = P(H_3)\times P_{H_3}(C) = 0,4\times 0,3$. On a donc $P(H_3\cap C) = 0,12$.

   c. Puisque la jardinerie ne se fournit qu'auprès de trois horticulteurs, les événements H_1, H_2 et H_3 forment une partition de l'univers. On peut donc appliquer la loi des probabilités totales, et on en déduit :
   $P(C) = P(H_1)\times P_{H_1}(C)+P(H_2)\times P_{H_2}(C)+P(H_3)\times P_{H_3}(C) =$
   $0,35\times 0,8+0,25\times 0,5+0,4\times 0,3 = 0,525$.

d. On cherche cette fois à calculer une probabilité conditionnelle :

$$P_C(H_1) = \frac{P(H_1 \cap C)}{P(C)} = \frac{0,35 \times 0,8}{0,525} \approx 0,533.$$

2. a. Nous avons un schéma de Bernoulli (l'arbre choisi est-il un conifère ?), avec une probabilité de succès de $0,525$ qui est répété 10 fois de façon indépendante (puisque l'on suppose que les choix successifs peuvent être assimilés à un tirage au sort avec remise), donc la variable aléatoire X suit bien une loi binomiale de paramètres 10 et $0,525$.

b. La probabilité demandée ici est celle de l'événement $X = 5$, et donc :

$P(X=5) = \binom{10}{5} \times 0,525^5 \times (1-0,525)^5$ Finalement $P(X=5) \approx 0,243$.

c. Cette fois, la probabilité demandée est celle de $X \leqslant 8$, qui est l'événement contraire de la réunion des événements disjoints $X = 9$ et $X = 10$. On a alors : $P(X \leqslant 8) = 1 - P(X=9) - P(X=10) \approx 0,984$.

Exercice 3

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x}$.

1. Étude d'une fonction

a. Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1$.

Pour tout réel x de $[0\,;\,+\infty[$: $g'(x) = 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x \geqslant 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$ (car tous les termes sont positifs.

La fonction g est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ (car la dérivée ne s'annule qu'en 0).

b. $g(0) = -1 < 0$ et $g(1) = \mathrm{e} - 1 > 0$. Dressons le tableau de variations de g :

x	0		a		1		$+\infty$
$g(x)$	-1	↗	0	↗	$\mathrm{e}-1$	↗	

D'après ce tableau de variations, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0;1]$; on appelle a cette solution.

$g(0{,}703) \approx -0{,}0018 < 0$ et $g(0{,}704) \approx 0{,}002 > 0$ donc $a \in [0{,}703;0{,}704]$.

c. D'après le tableau de variations de g :
- $g(x) < 0$ sur $[0;a[$
- $g(x) > 0$ sur $]a;+\infty[$

2. Étude de la fonction f

a. $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{x} = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \mathrm{e}^{x} + \frac{1}{x} = +\infty \Longrightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to +\infty} \mathrm{e}^{x} + \frac{1}{x} = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

b. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} + \frac{1}{x} \Longrightarrow f'(x) = \mathrm{e}^{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2\mathrm{e}^{x} - 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

c. Pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.

On dresse le tableau de variation de f :

x	0		a		$+\infty$
$g(x)$	-1	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(a)$	↗	$+\infty$

d. D'après son tableau de variation, la fonction f admet le nombre $f(a)$ comme minimum sur son intervalle de définition.

$f(a) = \mathrm{e}^{a} + \dfrac{1}{a}$. Or a est la solution de l'équation $g(x) = 0$ donc

$$g(a) = 0 \iff a^2\mathrm{e}^{a} - 1 = 0 \iff a^2\mathrm{e}^{a} = 1 \iff \mathrm{e}^{a} = \frac{1}{a^2}.$$

On en déduit que $f(a) = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$ et on a donc démontré que la fonction f admettait pour minimum sur $]0\,;\,+\infty[$ le nombre réel $m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$.

e. On a successivement(en valeurs approchées) :

$$0{,}703 < a < 0{,}704$$
$$0{,}4942 < a^2 < 0{,}4957$$
$$\frac{1}{0{,}4957} < \frac{1}{a^2} < \frac{1}{0{,}4942}$$
$$2{,}017 < \frac{1}{a^2} < 2{,}024$$

$$0{,}703 < a < 0{,}704$$
$$\frac{1}{0{,}704} < \frac{1}{a} < \frac{1}{0{,}703}$$
$$1{,}420 < \frac{1}{a} < 1{,}423$$

donc par somme : $2{,}017 + 1{,}420 < \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a} < 2{,}024 + 1{,}423$ et donc :

$3{,}43 < m < 3{,}45$