« *C'est par ce que la terre est une sphère que tout ce qu'elle engendre débouche sur des cercles vicieux* » Jacques Sternberg

## Exercice n°1 (QCM) :

Cocher la bonne réponse.

A) Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1 . On munit l'espace du RON $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BH}$ est égal à : a) 0 b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}$ .
2) Une équation du plan (ECG) est :
   a) $x + y - 2 = 0$ b) $x + y - 1 = 0$ c) $x - y = 0$.
3) Soit I = E * G et S la sphère de centre I et passant par F alors on a :
   a) Le plan (BEG) est tangent à S.
   b) L'intersection de S et le plan (BEG) est le cercle de diamètre [EG].
   c) L'intersection de S et le plan (BEG) est le cercle circonscrit au triangle EGH.

B) L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On considère le plan P d'équation : $2x + y - 2z + 1 = 0$ et le point A (2,1,0). Soit S la sphère de centre A et sécante à P suivant le cercle (C) de rayon $\sqrt{5}$ ; et S' la sphère de centre A et tangente à P.

1) Le rayon R de S est :
   a) $R = \frac{7}{3}$ b) $R = 3$ c) $R = 1$ d) $R = \sqrt{\frac{61}{5}}$ .
2) Le centre I de (C) est :
   a) I(0,-1,0) b) $I\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ c) $I\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ d) $I\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$.

## Exercice n°2 :

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.On considère les points : $A(2 ; 1 ; -1)$, $B(-1 ; 2 ; 4)$, $C(0 ; -2 ; 3)$, $D(1 ; 1 ; -2)$ et le plan (P) d'équation $x - 2y + z + 1 = 0$. Pour chacune des huit affirmations suivantes, dire, avec justification, si elle est vraie ou si elle est fausse.

1) **Affirmation 1 :** les points *A*, *B* et *C* définissent un plan.
2) **Affirmation 2 :** la droite (*AC*) est incluse dans le plan (P).
3) **Affirmation 3 :** une équation cartésienne du plan (*ABD*) est : $x + 8y - z - 11 = 0$.
4) **Affirmation 4 :** une représentation paramétrique de la droite (*AC*) est : $\begin{cases} x = 2\alpha \\ y = 2 + 3\alpha \\ z = 3 - 4\alpha \end{cases}$ $\alpha \in \mathrm{IR}$ .
5) **Affirmation 5 :** les droites (*AB*) et (*CD*) sont orthogonales.
6) **Affirmation 6 :** la distance du point *C* au plan (P) est égale à $4\sqrt{6}$ .
7) **Affirmation 7:** la sphère de centre *D* et de rayon $\frac{\sqrt{6}}{3}$ est tangente au plan (P).
8) **Affirmation 8 :** le point $E\left(-\frac{4}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{5}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point *C* sur le plan (P).

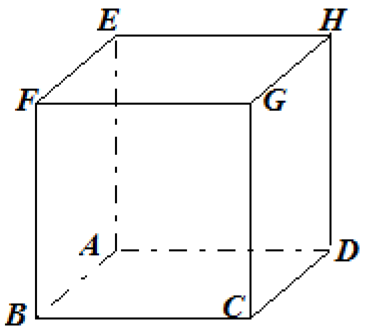
## Exercice n°3 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Soit les points A (3,2,4) , B(0,3,5) , C(0,2,1) et D (3,1,0).

1) a) Calculer les cordonnées de $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}$.
   b) Montrer que ABCD est un parallélogramme.
   c) Calculer l'aire du parallélogramme.
2) a) Soit E le point défini par : $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right)$. Déterminer les cordonnés de E.
   b) Calculer le volume du tétraèdre ABED.
3) a) Calculer les cordonnés de $\overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{DE}$.
   b) Calculer l'aire du triangle BDE. En déduire la distance du point A au plan (DBE).

## Exercice n°4 :

Soit le cube ABCDEFGH , l'espace est orienté par le repère orthonormé direct $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.




1) Déterminer les cordonnés de vecteur $\overrightarrow{BG}\wedge\overrightarrow{BE}$. En déduire l'aire du triangle BGE.
2) Calculer le volume du tétraèdre DBGE. En déduire la distance du point D au plan (BEG)
3) Soient I et K les points définis par : I = E*F et K centre du carré ADHE.
   a) Préciser les cordonnés des points I et K.
   b) Soit Δ la droite passant par le point K et de vecteur directeur $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{AE}$ déterminer d(I, Δ).

## Exercice n°5 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.On considère les points A(3,1,0) , B(1,2,0) , C(3,2,1) et D (0,0,d) où d désigne un réel positif ou nul.

1) On pose $\vec{N}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$. Calculer les cordonnées de $\vec{N}$. En déduire l'aire de triangle ABC.
2) a) Vérifier que les points A,B,C et D ne sont pas coplanaires.
   b) Montrer que le volume du tétraèdre ABCD est $V_d=\frac{2d+5}{6}$.
   c) Déterminer pour quelle valeur de d la droite (DB) est perpendiculaire au plan (ABC).

## Exercice n°6 :

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé de sens direct $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OK})$, on considère le cube JOIRNKLM. On note A le milieu de l'arête [IL] et B le point défini par : $\overrightarrow{KB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{KN}$.

On appelle P le plan passant par les points O, A et B.

1) a) Préciser les coordonnées des points A et B.
   b) Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ orthogonal à $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.
2) a) Montrer que l'aire du triangle OAB vaut $\frac{\sqrt{14}}{6}$.
   b) Le point $C\left(1\,;\frac{1}{3};1\right)$ appartient-il à P ? Justifier votre réponse.
3) On considère le tétraèdre OABK. Montrer que son volume vaut $\frac{1}{9}$.. En déduire la distance du point K au plan P.

**Exercice n°7 :**

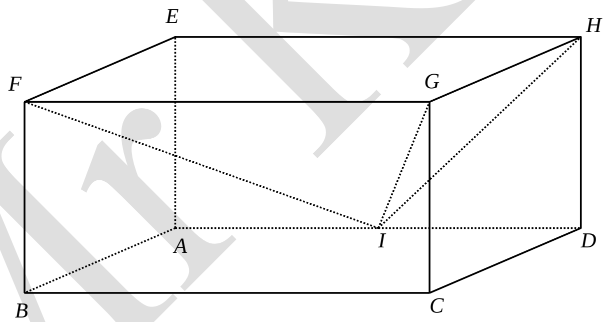
L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.Soit A(3,2,-1) et H(1,-1,3).

1) Déterminer une équation de plan P passant par H orthogonal à (AH).
2) On donne les points B(-6,1,1) , C(4,-3,3) et D(-1,-5,-1).
   a) Montrer que les points B ,C e D appartiennent au plan P.
   b) Calculer les cordonnés de $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}$.
3) a) Montrer que l'aire du triangle BCD est égale à $5\sqrt{29}$.
   b) Montrer que le volume du tétraèdre ABCD est égale à $\frac{145}{3}$.
4) a) Calculer l'aire de ABC.
   b) Calculer la distance du point D au plan (ABC).

**Exercice n°8 :**

Une unité de longueur étant choisie dans l'espace, on considère un pavé droit *ABCDEFGH* tel que :

$AB = 1$, $AD = 2$ et $AE = 1$. On appelle *I* le milieu de [*AD*]. L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AE}\right)$.




1) Déterminer, dans le repère choisi, les coordonnées des points *F*, *G*, *H*.
2) a) Montrer que le volume *V* du tétraèdre *GFIH* est égal à $\frac{1}{3}$.
   b) Montrer que le triangle *FIH* est rectangle en *I*. En exprimant *V* d'une autre façon, calculer la distance *d* du point *G* au plan (*FIH*).
3) Soit le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (2 ; 1 ; –1).
   a) Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (*FIH*).

b) En déduire une équation cartésienne du plan (*FIH*).

c) Retrouver par une autre méthode la distance *d* du point *G* au plan (*FIH*).

4) a) La droite (*AG*) est-elle perpendiculaire au plan (*FIH*) ?

b) Donner un système d'équations paramétriques de cette droite.

c) Déterminer les cordonnées du point d'intersection *K* de (*AG*) et de (*FIH*).

**Exercice n°9 :**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère la sphère (S) d'équation $x^2+y^2+z^2-8=0$ et le plan P d'équation x + 2y + z – 6 = 0.

1) a) Déterminer le centre et le rayon de la sphère (S).
   b) Montrer que P coupe (S) suivant un cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon.
2) On donne les points A(2,0,2) et B(2,2,0).
   a) Vérifier que A∈ (S) et n'appartient pas au plan P et que B appartient à (C).
   b) Soit Q l'ensemble des points M(x,y,z) de l'espace tel que MA = MB. Montrer que Q est le plan d'équation y = z.
   c) Montrer que P et Q se coupe suivant une droite Δ dont une représentation graphique est : $\begin{cases} x=6-3\alpha \\ y=\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$ ; $\alpha\in \mathrm{IR}$.
3) Déterminer un point C du cercle (C) tel que ABC est un triangle équilatéral.

**Exercice n°10 :**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On considère les points A(6,0,0) B(0,6,0) , C(0,0,6) et D (-2,-2,-2).

1) a) Vérifier que les points A,B et C déterminent un plan.
   b) Donner une équation cartésienne du plan P.
2) a) Vérifier que la droite (OD) $\perp$ P.
   b) Donner la représentation paramétrique de la droite (OD).
3) Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan P. Vérifier que H a pour cordonnées (2,2,2) et qu'il est équidistant de A, B et C. En déduire que (OD) est l'axe de (C) cercle circonscrit au triangle ABC.
4) Soit Q le plan médiateur du segment [CD].
   a) Montrer qu'une équation cartésienne de Q est : x + y + 4z – 6 =0.
   b) Montrer que (OD) coupe Q en un point $\Omega$ dont on précisera les cordonnées.
5) Soit S la sphère de centre $\Omega$ et de rayon $3\sqrt{3}$.
   a) Ecrire une équation cartésienne deS.
   b) Vérifier que S passe par A, B , C et D.
   c) Quel est l'intersection de S et P.

**Exercice n°11 :**

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1. On munit l'espace d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{A},\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AD}},\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

Soit I = B * F et J le point tel que $\overrightarrow{EJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{EH}$ .

1) a) Déterminer les cordonnées des points I et J et du vecteur $\vec{u}=\overrightarrow{AI}\wedge\overrightarrow{AJ}$.
   b) Montrer que l'aire de AIJ est $\frac{\sqrt{14}}{3}$.
2) Montrer que le volume du tétraèdre AIJE est $\frac{1}{9}$ puis en déduire la distance du point E au plan AIJ.
3) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (AIJ) est : x + 3y – 2z = 0 et retrouver la distance du point E au plan AIJ.
4) Soit S l'ensemble des points M(x,y,z) tel que : $x^2+y^2+z^2-2x-2z-2=0$.
   a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.
   b) Montrer que S et (AIJ ) son sécants suivant un cercle que l'on précisera.

**Exercice n°12 :**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On considère les points A(6,0,0) B(0,-6,0) , C(0,0,3) et soit S la sphère d'équation : $x^2+y^2+z^2-x+y-2z=12$.

1) a) Déterminer une équation du plan P passant par A,B et C.
   b) Déterminer le centre I de S et calculer son rayon.
   c) Montrer que S et P sont sécants suivant un cercle dont on déterminera le centre H et le rayon.
2) a) Vérifier que le point K (-1,1,-2) est un point de S.
   b) Déterminer une équation du plan Q tangent à S en K.
   c) Vérifier que P et Q sont paralléles.

**Exercice n°13 :**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Soit S = $\left\{M(x,y,z) \text{ tel que ; } x^2+y^2+z^2-2x+4y+4z+5=0\right\}$.

1) Montrer que S est une sphère dont on déterminera le centre $\Omega$ et le rayon R.
2) Soit P le plan d'équation : x – 2y + 2z +2 = 0.
   a) Montrer que l'intersection de la sphère S et du plan P est un cercle (C).
   b) Déterminer les cordonnées du centre A et le rayon r du cercle (C).
3) a) Soit M (a,b,-1) un point de la sphère S où a et b sont deux réels et Q le plan d'équation :
   (a-1)x + (b +2)y + z –a + 2b +3 =0.
   a) Montrer que M appartient au plan Q.
   b) Montrer que S et Q sont tangents en M.