Exercice N°1 Session principale 2014

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère la sphère (S) d'équation $x^2+y^2+z^2-8=0$ et le plan P d'équation $x+2y+z-6=0$.

1) a) Déterminer le centre et le rayon de la sphère (S).

b) Montrer que le plan P coupe la sphère (S) suivant un cercle $(\mathcal{C})$ dont on précisera le centre et le rayon.

2) On donne les points A(2, 0, 2) et B(2, 2,0).

a) Vérifier que A appartient à la sphère (S) et n'appartient pas au plan P et que B appartient au cercle $(\mathcal{C})$.

b) Soit Q l'ensemble des points M(x, y, z) de l'espace tels que $MA = MB$.

Montrer que Q est le plan d'équation $y = z$.

c) Montrer que les plans P et Q se coupent suivant la droite Δ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x=6-3\alpha \\ y=\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

3) Déterminer un point C du cercle $(\mathcal{C})$ tel que ABC est un triangle équilatéral.

Exercice N°2 Session de contrôle 2014

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère l'ensemble (S) des points M(x, y, z) de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2-2x+2y-1=0$.

1) Montrer que (S) est la sphère de centre le point $I(1,-1,0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

2) Soit Δ la droite passant par le point $A(0,0,3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

a) Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ.

b) Montrer que l'intersection de Δ et (S) est vide.

3) Soit B le point de coordonnées (3, 0, 0).

a) Justifier que le point B et la droite Δ déterminent un plan P.

b) Montrer que P a pour équation cartésienne $x+y+z-3=0$.

c) Prouver que le plan P est tangent à la sphère (S) et déterminer les coordonnées de leur point de contact.

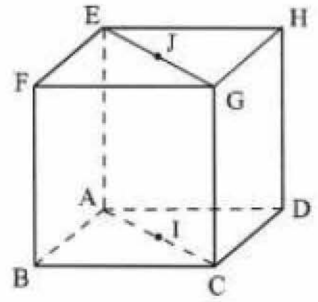
Exercice N°3 Session principale 2013

Dans la figure ci - contre, ABCDEFGH est un cube d'arête 1.

Le point I est le milieu du segment $[AC]$.

Le point J est le milieu du segment $[EG]$.

L'espace est muni du repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



Répondre par vrai ou faux à chacune des propositions suivantes en justifiant la réponse.

1) $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AE}$.

2) $\left(\overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{IG}\right).\overrightarrow{IJ} = 0$.

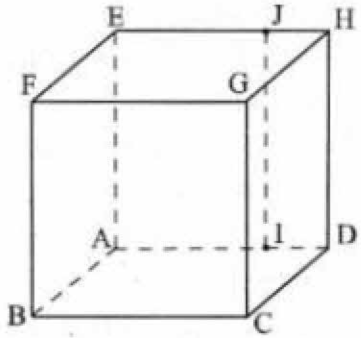
3) La sphère de diamètre $[AC]$ est tangente au plan d'équation $z-1=0$.

<u>Exercice N°4</u> Session de contrôle 20 13

Dans la figure ci-contre,

- ABCDEFGH est un cube d'arête 1.
- $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{EJ} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AD}$

On note $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{AE}$ et on munit l'espace du repère orthonormé direct $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.



1) a) Déterminer les coordonnées des points F, G, I et J.

b) Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (IJ) est $\begin{cases} x=0 \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ z=\alpha \end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dans la suite de l'exercice α est un réel et M est un point de la droite (IJ) de coordonnées $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \alpha\right)$

2) a) Vérifier que $\overrightarrow{AF} \wedge \overrightarrow{AM} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \alpha\vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}$ et que $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BM} = \alpha\vec{i} + \vec{k}$.

b) En déduire que les triangles AFM et BCM ont la même aire.

3) a) Montrer que $\left(\overrightarrow{AF} \wedge \overrightarrow{AM}\right).\overrightarrow{AG} = -\alpha$ et que $\left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BM}\right).\overrightarrow{BG} = 1$.

b) Montrer que

(M,A,F et G sont coplanaires) si et seulement si (M et I sont confondus).

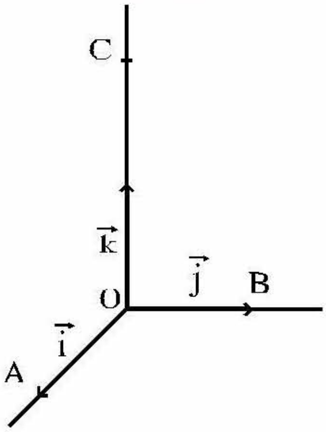
c) Déterminer les points M de la droite (IJ) pour lesquels AFMG et BCMG sont deux tétraèdres de même volume .

<u>Exercice N°5</u> Session principale 2012

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ et $C(0,0,2)$.



1) Le vecteur $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC}$ est égal à

a/ $\overrightarrow{OA}$ b/ $2\overrightarrow{OA}$ c/ $-2\overrightarrow{OA}$.

2) Le réel $\frac{1}{6}(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AO}).\overrightarrow{AC}$ est égal à

a/ 0 b/ $\frac{1}{3}$ c/ 2 .

3) La droite (BC) est l'intersection des plans d'équations

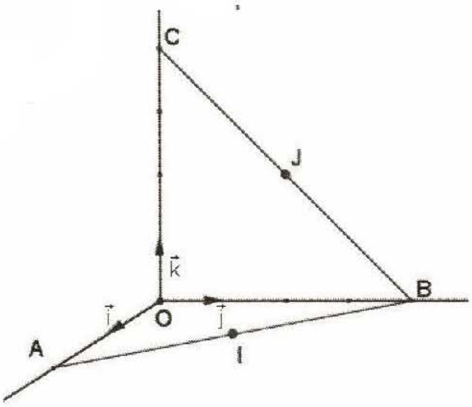
a / $x=1$ et $2y+z-2=0$. b / $x=0$ et $y+2z-1=0$. c / $x=0$ et $2y+z-2=0$.

4) Une équation de la sphère de centre O et tangente au plan (ABC) est

a / $x^2+y^2+z^2=1$. b / $x^2+y^2+z^2=\frac{4}{9}$. c / $x^2+y^2+z^2-2x=\frac{4}{9}$.

Exercice N°6 Session de contrôle 2012

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On considère les points $A(2,0,0)$, $B(0,4,0)$ et $C(0,0,4)$ et
on désigne par I et J les milieux respectifs
des segments $[AB]$ et $[BC]$.



1) Déterminer les coordonnées des points I et J.

2) Soit P l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $MI=MJ$.

a/ Montrer que P est le plan d'équation $2x-4z+3=0$.

b/ Montrer que la droite (OC) et le plan P sont sécants en un point K que l'on précisera.

3) Soit S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que

$$x^2+y^2+z^2-\frac{3}{2}z-5=0.$$

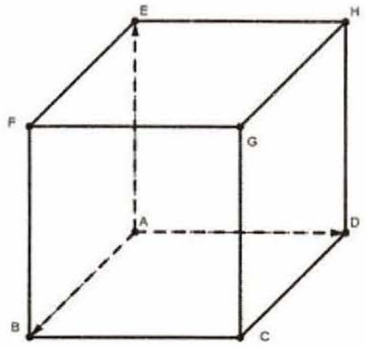
a/ Montrer que S est une sphère dont on déterminera le centre et le rayon.
b/ Vérifier que les points I et J appartiennent à la sphère S.
c/ Montrer que S est la seule sphère qui passe par les points I et J et dont le centre est un point de la droite (OC).

4) Déterminer l'intersection du plan P avec la sphère S.

Exercice N°7 Session principale 2011

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Dans la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube d'arête 1.
On munit l'espace du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1) Le vecteur $\overrightarrow{BF} \wedge \overrightarrow{BC}$ est égal à
   a) $\overrightarrow{BG}$ b) $\overrightarrow{BD}$ c) $\overrightarrow{BA}$.

2) L'intersection des plans d'équations x = 1 et y = 1 est la droite
   a) (CH) b) (CF) c) (CG).

3) Une équation du plan (ACE) est
   a) $x + y = 0$ b) $x - y = 0$ c) $x - y = 1$.

4) L'intersection de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ avec le plan d'équation z = 1 est
   a) un cercle b) un point c) l'ensemble vide.

Exercice N°8 Session de contrôle 2011

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points A(1, 0 ,0), B(0, 2, 0) et C(0, 0, 3).

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
   b) En déduire qu'une équation du plan (ABC) est $6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

2) Soit I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [AC].
   On désigne par Δ la droite passant par I et de vecteur directeur $\vec{k}$ et par Δ' la droite passant par J et de vecteur directeur $\vec{j}$.
   a) Donner une représentation paramétrique de chacune des droites Δ et Δ'.
   b) En déduire que Δ et Δ' sont sécantes au point $\Omega\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$

3) Soit (S) la sphère de centre Ω et passant par O.
   a) Vérifier que (S) passe par les points A, B et C.
   b) En déduire le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice N°9 Session principale 2010

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points A(1 , 0 , 0), B(0 , 0 , 1) et C (1 , -1 , 1) .

1) a) Déterminer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. En déduire que les points A, B et C déterminent un plan $\mathscr{P}$.
   b) Montrer qu'une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est $x + y + z - 1 = 0$.

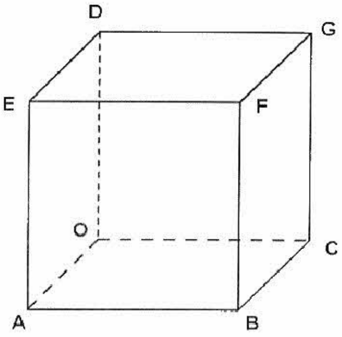
2) Soit S l'ensemble des points M(x , y , z) de $\mathscr{E}$ tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z + 1 = 0$.
   a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon r.
   b) Montrer que $S \cap \mathscr{P}$ est le cercle circonscrit au triangle ABC.

3) a) Calculer le volume du tétraèdre IABC.
   b) Soit α un réel et soit M un point de $\mathscr{E}$ de coordonnées $(\alpha, 0, 2 - \alpha)$.
   Montrer que, lorsque α décrit l'ensemble IR, le volume du tétraèdre MABC reste constant.

Exercice N°10 Session de contrôle 2010

Dans la figure ci-contre OABCDEFG est un cube d'arête 1.

On munit l'espace du repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}\right)$.



1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}$.

b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ACD) est $x + y + z - 1 = 0$.

2) Soit Δ la droite passant par O et perpendiculaire au plan (ACD)

a) Donner une représentation paramétrique de la droite Δ.

b) Déterminer les coordonnées du point H, intersection de Δ et du plan (ACD).

3) Pour tout réel m, on désigne par S_m l'ensemble des points M (x, y, z) de l'espace tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2my - 2mz - 1 + 3m^2 = 0$

a) Montrer que pour tout réel m, S_m est une sphère dont on précisera le centre I_m et le rayon r .

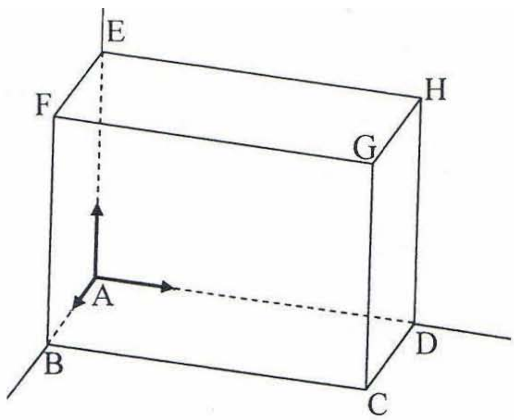
b) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles S_m passe par le point A.

4) a) Vérifier que les centres des sphères S_0 et $S_{\frac{2}{3}}$ sont deux points de la droite Δ.

b) Justifier que le plan (ACD) coupe les deux sphères S_0 et $S_{\frac{2}{3}}$ suivant un même cercle qu'on précisera .

Exercice N°11 Session principale 2009

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ et ABCDEFGH est un parallélépipède tel que $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i}$; $\overrightarrow{AD} = 4\vec{j}$ et $\overrightarrow{AE} = 3\vec{k}$.



1) a) Vérifier que $\overrightarrow{AG} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$.

b) Déterminer les composantes de chacun des vecteurs $\overrightarrow{EB}$; $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EB} \wedge \overrightarrow{EG}$.

c) Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG).

2) Soit α un réel différent de 1 et M le point de coordonnées $(2\alpha, 4\alpha, 3\alpha)$.

a) Vérifier que M décrit la droite (AG) privée du point G.

b) Montrer que M n'appartient pas au plan (EBG).

3) Soit $\mathcal{V}$ le volume du tétraèdre MEBG.

a) Exprimer $\mathcal{V}$ en fonction de α.

b) Calculer le volume du tétraèdre AEBG.

c) Pour quelles valeurs de α , $\mathcal{V}$ est-il égal au volume du parallélépipède ABCDEFGH ?

Exercice N°12 Session de contrôle 2009

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère la droite Δ passant par le point $A(-3, -1, -3)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ et la droite D passant par le point $B(3, 2, 3)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

1) a) Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\det(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB})$.

b) Justifier que les droites Δ et D sont orthogonales et non coplanaires.

c) Déterminer une équation cartésienne du plan contenant Δ et parallèle à D.

2) Soit S la sphère de centre $C(-1, 0, -1)$ et de rayon 6 et $\mathscr{P}$ le plan d'équation $2x + y + 2z + 13 = 0$.

a) Montrer que S et $\mathscr{P}$ se coupent suivant un cercle de centre A. Déterminer le rayon de ce cercle.

b) Montrer que la droite D est tangente à la sphère S au point B.

3) a) Calculer AB. En déduire que le point C appartient au segment [AB].

b) Déterminer alors une droite perpendiculaire aux droites D et Δ.

Exercice N°13 Session principale

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points A(3,2,6) ; B(1,2,4) et C(4,-2,5).

1) a) Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

c) Calculer le volume du tétraèdre OABC.

2) Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

Montrer que $OH = \frac{4}{3}$.

3) Soit S la sphère de centre O et passant par A.

a) Justifier que l'intersection de S avec le plan (ABC) est un cercle $\mathscr{C}$ de centre H.

b) Calculer le rayon du cercle $\mathscr{C}$.

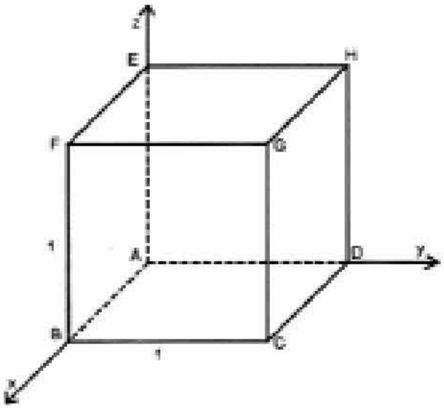
2008

Exercice N°14 Session de contrôle 2008

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte vaut 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

ABCDEFGH est un cube d'arête 1.

On munit l'espace du repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BH}$ est égal à :

a) 0 b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}$.

2) Une équation du plan (ECG) est :

a) $x + y - 2 = 0$ b) $x + y - 1 = 0$ c) $x - y = 0$.

3) On désigne par I le milieu du segment [EG].

Soit S la sphère de centre I et passant par F. Alors on a :

a) Le plan (BEG) est tangent à la sphère S.

b) L'intersection de la sphère S et le plan (BEG) est le cercle de diamètre [EG].

c) L'intersection de la sphère S et le plan (BEG) est le cercle circonscrit au triangle EGH.

Exercice N°15 **Session principale 2007**

Session de contrôle 20

Séries des exercices : Arithmétiques