$4^{ème}$ Année	Série d'exercices
Réalisé par : Prof Bouzouraa Chaouki	Fonction Ln- Suite-integ

EXERCICE N° 1 :

1°/ Déterminer les intégrales suivantes :

A = $\int_1^e \frac{dx}{x}$, B = $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$; C = $\int_{-1}^0 \frac{dx}{1-x}$; D = $\int_2^3 \frac{2x+3}{x-1}$; E = $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$;

F = $\int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)}$; G = $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$; H = $\int_1^e \frac{1}{x}\ln x dx$; I = $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$; J = $\int_1^e \frac{[\ln x]^2}{x}dx$

2°/ Calculer à l'aide d'une intégration par partie les intégrales suivantes :

A = $\int_1^e x\ln x dx$; C = $\int_2^{e+1} \ln(t-1)dt$; (On pourra écrire $\frac{t}{t-1}=1+\frac{1}{t-1}$)

D = $\int_1^3 \frac{\ln x}{(1+x)^2}dx$ (On remarque que : $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$) ; B= $\int_1^e x^2 \ln dx$

E = $\int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{x^2}dx$; M = $\int_2^{e+1} x\ln(x-1)dx$;

EXERCICE N°2 :

1°/ $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}+\ln x$; 2°/ $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x$; 3°/ $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln x$; 4°/ $\lim\limits_{x\to 0^+} x(\ln x)^2$; 5°/ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x}$;

6°/ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x+x^2)}{x}$; 7°/ $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x-1}{\ln x}$; 8°/ $\lim\limits_{x\to(-1)^+} \frac{t}{1+t}-\ln(1+t)$ 9°/ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-2\ln x-1$;

10°/ $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\ln(x^2+1)$; 11°/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{x}$; 12°/ $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(\frac{x+1}{x})$; 13°/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+\ln x}{\ln x}$;

14°/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+\ln x}{x^2}$; 15°/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{2x+3}$; 16°/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$; 17°/ $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\ln x$; 18°/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x}$;

19°) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(\frac{1+x}{x})$; 20°) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(1+\frac{1}{x})$; 21°) $\lim\limits_{x\to 1^-} [\ln(1-x)+\frac{1}{1-x}]$

EXERCICE N° 3:

L'objectif est de calculer les intégrales suivants : I = $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$; J = $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx$ et K = $\int_0^1 \sqrt{x^2+2}dx$

1°/ ***Calcul de I*** : Soit la fonction f définie sur [0, 1] par f (x) = ln (x + $\sqrt{x^2+2}$).

a) Calculer la dérivée de la fonction $x \to \sqrt{x^2+2}$.

b) En déduire la dérivée f ' de f. Calculer la valeur de I.

2°/ ***Calcul de J et de K***.

a) Sans calculer explicitement J et K, vérifier que : J + 2 I = K.

b) A l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale K. Montrer que : K = $\sqrt{3}$ - J.

c) En déduire les valeurs de J et de K.

EXERCICE N °4:

Soit $S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+............+\frac{1}{n}$.

1°/ a) Montrer que : $\frac{1}{k+1} \le \ln(1+k)-\ln k \le \frac{1}{k}$, k ∈ IN .

b) Déduire que : $\ln n \le S_n \le 1+\ln n$. Etudier $\lim \frac{S_n}{\ln n}$.

2°/ Etudier la monotonie et la convergence de $S_n - \ln n$.

3°/ Soit la suite V_n définie sur IN* par : $V_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+..................+\frac{1}{2n}$.

Montrer que : $\text{Log}\frac{1+2n}{1+n} \le V_n \le \ln 2$. En déduire la limite de la suite V_n.

EXERCICE N°5:

On pose $I_0 = \int_1^e x dx$ et pour tout n $\in$ IN*, $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$.

1°/ Calculer I_0 et I_1.

2°/ pour tout n $\in$ IN*, établir la relation (*): $2I_n + n I_{n-1} = e^2$ .En déduire $\int_1^e x(\ln(x)+2)^2 dx$.

3°/ a) Montrer que la suite de terme général I_n est décroissante.

b) Prouver que I_n est minorée.

c) Montrer que I_n est convergente.

4°/ a) Prouver que pour tout n $\in$ IN : $I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$ (on pourra utiliser le 3°/ a) et la relation (*)).

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

EXERCICE N°6 :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

1°/ Montrer que, pour tout entier naturel k, k $\geq$ 0: $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k)$. (Utiliser le sens de variation de f)

2°/ On considère la suite S définie par son terme général : $S_p = \frac{\ln 2}{2^2} + \frac{\ln 3}{3^2} + \ldots\ldots + \frac{\ln p}{p^2}$; p $\geq$ 2.

a) Montrer que la suite S est croissante.

b) En utilisant (1), montrer que : $S_p - \frac{\ln 2}{2^2} \leq \int_2^p f(t)dt \leq S_p - \frac{\ln p}{p^2}$ et en déduire un encadrement de S_p .

c) En utilisant la valeur de $\int_2^p f(t)dt$, démontrer que la suite S est majorée.

d) On admettra que la suite S est convergente, montrer que sa limite L vérifie :

$$\frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{2} \leq L \leq \frac{1}{2} + 3\frac{\ln 2}{2^2}$$

EXERCICE N° 7 :

Pour tout n $\in$ IN*, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\text{®}}{4}} (tgx)^n dx$.

1°/ a) Pour tout réel x de l'intervalle $[0, \frac{\text{®}}{4}]$ et pour tout entier naturel n, calculer la dérivée de la fonction

: $x \mapsto (\text{tg}x)^{n+1}$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel non nul, on a : $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$.

2°/ a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul, on a : $I_n \geq 0$. En déduire que : $I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

b) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

3°/ Soit g la fonction définie sur $[0, \frac{\text{®}}{4}]$ et par : g (x) = ln (cosx).

a) Calculer g' (x) ou g' désigne la fonction dérivée de g sur $[0, \frac{\text{®}}{4}]$.

b) En déduire I_1 et I_3.

(Bac tunisien 1999C)

EXERCICE N °8 :

1°/ a) A l'aide des inégalités des accroissements finis, montrer que pour tout x >1 ; $\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$.

b) Montrer que pour tout x ∈] 0 , 1 [, $\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$, ∀ x ∈]0, 1[. (On pose $x = \frac{1}{X}$ avec X > 1)

c) ♠En déduire que pour tout x > 0, $\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$

♠ En déduire que pour tout x ∈] 0 , 1 [, $\ln(1+x) \leq x \leq -\ln(1-x)$.

2°/ Soit $(U_n)_{n \in IN}$ la suite définie par $U_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots\dots\dots\dots + \frac{1}{2n}$.

a) Montrer que pour tout n ∈ IN* , $\ln\left(2 + \frac{1}{n}\right) \leq U_n \leq \ln\left(2 + \frac{2}{n-1}\right)$.

b) En déduire que la suite $(U_n)_{n \in IN}$ est convergente et déterminer sa limite quand n tend vers + ∞

EXERCICE N°9:

On considère la fonction f définie sur IR par: $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$.

Soit ¸ sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°/ a) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

b) Montrer que la droite D d'équation x = 1 est un axe de symétrie de la courbe ¸ .

c) Préciser la branche infinie de ¸ au voisinage de + ∞ puis tracer la courbe ¸ .

2°/ Soit F la fonction définie sur $[0, \frac{®}{2}[$ par $F(x) = \int_1^{1+tgx} \frac{dt}{t^2 - 2t + 2}$.

a) Montrer que F est dérivable sur $[0, \frac{®}{2}[$ et que F'(x) = 1 .

b) En déduire que F (x) = x et que $\int_1^2 \frac{dt}{t^2 - 2t + 2} = \frac{®}{4}$.

3°/ a) A l'aide d'une intégration par partie, montrer que : $\int_1^2 f(x)dx = 2\ln 2 - 2\int_1^2 \frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 2}dx$.

b) Vérifier que pour tout réel x on a : $\frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 2} = 1 + \frac{x-1}{x^2 - 2x + 2} - \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$.

c) Calculer, alors, l'aire du domaine limité par la courbe ¸ , l'axe des abscisses et les droites x =1 et x =2.

EXERCICE N° 10 :(Bac 2008)

1°/ Soit f la fonction définie sur [-2, 2] par : $\begin{cases} f(x) = (x+2)\ln(x+2) & \text{si } x \neq -2 \\ f(-2) = 0 \end{cases}$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Montrer que f est continue à droite en -2.

b) Montrer que f est dérivable à droite en -2.

c) Donner le tableau de variation de f.

2°/ Soit g la fonction définie sur [-2, 2] par $g(x) = f(x) - x\sqrt{4 - x^2}$.

Soit (C') sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Déterminer la position relative de (C) et (C').

b) Dans l'annexe ci-contre, on a tracé la courbe (C') de g.
Tracer la courbe (C) dans le même repère.

3°/ Soit ~ un nombre réel non nul appartenant à [-2, 2]

a) On désigne par $A_{\sim}$ l'aire de la partie du plan
limité par les courbes (C) et (C') et les droites
d'équation respectives x = 0, x = ~ .

b) Montrer que $A_{\sim} = \int_0^{\sim} x\sqrt{4-x^2}\,dx$.

(On distinguera les deux cas ~ > 0 et ~ >0).

c) Calculer $A_{\sim}$.

d) En déduire l'aire de la partie du plan limitée par les deux courbes (C) et (C').

EXERCICE N° 11:

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par: $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - x^2 \ln x + 1$ si $x > 0$ et $f(0) = 1$

1°/ Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

2°/ Dresser le tableau de variation de f.

La courbe (C) donnés ci dessous est la courbe représentative, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, de la fonction f, et T est la tangente à (C) au point A d'abscisse 1.

Utiliser le graphique ci-contre pour répondre aux questions suivantes:

a) Déterminer f (1), f (e), f '(1) et f '(e) et f''(1).

b) Soit $\overline{f}$ la valeur moyenne de f sur [0, 1].

Donner un encadrement de $\overline{f}$.

3°/ Soit (C') la parabole d'équation $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$.

a) Déterminer l'intersection de (C) et (C').

b) Etudier la position relative de (C) par rapport à (C') sur $[0, +\infty[$ et tracer (C') dans le même repère.

4°/ Soit $x \in [1, e]$.On désigne par M et N les points respectives de (C) et (C') de même abscisse x.

a) Exprimer la distance MN en fonction de x.

b) Quelle est la valeur maximale de MN.

5°/ Pour $n \in$ IN*, on pose $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{e} (x^2 - x^2 \ln x)dx$.

a) Interpréter graphiquement I_n.

b) Calculer I_n à l'aide d'une Intégration par parties.

c) En déduire l'aire de la partie du plan limitée par (C) et (C') et les droites d'équations x = 0 et x = e.

EXERCICE N° 12 :

Dans le graphique ci- contre:

(Γ) est la courbe représentative, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'une fonction f définie sur l'intervalle IR* par $f(x) = x - \ln|x|$.

(Γ) admet une asymptote verticale au voisinage de $+\infty$.

1°/ Par une lecture graphique :

a) Déterminer f (1), f (-1), f '(1) et f '(-1).

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

c) Justifier que le restriction g de f à l'intervalle $]-\infty, 0[$ admet une fonction réciproque g^{-1} et préciser l'ensemble de définition de g^{-1}.

2°/ Soit ~ un nombre réel non nul appartenant à]0, 1[.

b) On désigne par $A_{\sim}$ l'aire (en u.a) de la partie du plan

limité par la courbe (C) et les droites
d'équation respectives y = x ; x = 1, x =~ .

b) Montrer que $A_{\sim}$ = ~ ln(-~) +1 -~

c) Calculer $\lim\limits_{\sim \to 0^+} A_{\sim}$.

3°/ a) Soit g et G les fonctions définie sur]0, +∞[par g(x) = $(\ln x)^2$ et G(x) = $x(\ln x)^2$ – 2xlnx + 2x.
Montrer que G est une primitive de g sur]0, +∞[.

b) Soit ~ > 1.A l'aide d'une intégration par partie, calculer $\int_1^a x\ln x dx$.

c) Soit C = {M(x,y) tel que y = f(x) et 1 ≤ x ≤ e} et C' = {M(x,y) tel que y = x et 1 ≤ x ≤ e}.
On désigne par S et S' les solides de révolution engendré par la rotation de C et C' respectivement autour de l'axe (O, $\vec{i}$). Calculer le volume V de la partie de l'espace entre S et S'.

EXERCICE N° 13 :Bac Sc2008

Dans le graphique ci- contre :
Γ est la courbe représentative, dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), d'une fonction f définie sur l'intervalle [0, +∞[et dérivable sur]0 , +∞[.
* Les points O, A et B appartiennent à Γ .
* La droite (AC) est la tangente à Γ au point A.
* Γ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de+∞.

1°/ Par une lecture graphique :

a) Déterminer f (0), f (2), f (2e), f '(2) et f '(2e).

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}$ f (x) et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

c) Justifier que le restriction g de f à l'intervalle [2 , +∞[admet une fonction réciproque g^{-1} et préciser l'ensemble de définition de g^{-1}.

2°/ On admet que g est définie par g (x) = x (1 + ln2 – lnx), pour tout x ≥ 2 .On désigne par (C) la courbe représentative de g et par (C') celle de g^{-1} dans un repère orthonormé (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$). Tracer (C) et (C').

3°/ Soit D la partie du plan limitée par les axes ((O , $\vec{i}$) et (O, $\vec{j}$) et les courbes représentatives (C) et (C')..

a) Hachurer D. Montrer à l'aide d'une intégration par partie, que $\int_2^{2e} g(x)dx$ = e^2 – 3.

b) Calculer l'aire de D.

EXERCICE N° 14:

Partie A: Soit la fonction définie par : f (x) = x + $\sqrt{x^2+x+1}$.

1°/ Etudier les variations de f et tracer la courbe représentative C_f dans un repère orthonormé.
2°/ Soit C'la courbe image de C_f par la symétrie orthogonale d'équation y = x.

Construire C' et démontrer que (C') est la courbe d'une fonction f_1 telle que : f_1 (x) = $\dfrac{x^2-1}{2x+1}$

3°/ Déterminer $\int_0^1 \dfrac{x^2-1}{2x+1}dx$.

Partie B : Soit g la fonction définie par : g (x) = ln (x + $\sqrt{x^2+x+1}$) = ln (f (x)).

1°/ Etudier les variations de g et tracer la courbe représentative C_g dans un repère orthonormé.
2°/ Démontrer que g est une bijection de] –1, +∞[sur IR .
Construire la courbe représentative C' de g^{-1} et expliciter g^{-1} (x).

4°/ On considère la fonction h définie sur IR_+^* par: h(t) = ln[1+$\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}$].

a) Montrer que h est strictement décroissante sur IR^*_+

b) On pose $V_n = \int_n^{n+1} h(t)dt$ avec n ∈ IN*. Montrer que ∀ n ∈ IN : h(n+1) ≤ V_n ≤ h(n)

c) En déduire que V_n est convergente et calculer sa limite.

EXERCICE N° 15 :Bac M 2008P

1°/ Dans le graphique ci- dessous : On a représenté, dans un repère orthonormé (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$), la courbe(C) de la fonction f définie sur [$\frac{1}{e}$, e] par f (x) = $\ln^3(x)$ - 3 ln x et les demi -tangentes à la courbe(C) au points d'abscisse respectives $\frac{1}{e}$ et e.

a) En utilisant le graphique :

Montrer que f réalise une bijection de [$\frac{1}{e}$, e] sur [-2 , 2]. (On note f^{-1} la fonction réciproque de f et (C') la courbe représentative de f^{-1} dans un repère (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$).

b)Tracer la courbe représentatives(C') et les demi tangentes à (C') aux points d'abscisse respectives-2 et 2.

2°/Soit la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ définie par $a_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$.

a) Calculer a_1.

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par partie, que l'on a pour tout n ∈ IN*, a_{n+1} = e - (n + 1) a_n

c) En déduire que a_3 = 6 – 2e.

3°/ Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C') et les droites d'équations = - 2 et x = 0.

a) Calculer $\int_1^e f(x)dx$.

b) En déduire A ?

3°/ a) Soit g et G les fonctions définie sur]0, +∞[par g(x) = $(\ln x)^2$ et G(x) = $x(\ln x)^2$ – 2xlnx + 2x.

Montrer que G est une primitive de g sur]0, +∞[.

EXERCICE N° 16 :

Dans le graphique page 4: C est la courbe représentative, dans un repère orthonormé (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$), d'une fonction f définie sur IR_+ et Δ la droite d'équation y = x.

1°/ Donner dans IR_+ les solutions de l'équation f '(x) = 0.

2°/ Déterminer le sens de variation de f sur IR_+.

3°/ Etudier le signe de f(x) – x sur IR_+.

4°/ Soit h la restriction de f à l'intervalle [1, +∞[.

a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} et préciser l'ensemble de définition de h^{-1}.

b) On désigne par (C_1) la courbe représentative de h et par (C') celle de h^{-1} dans le même repère orthonormé (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$). Tracer les courbes représentatives (C').

c) Déterminer $(h^{-1})'_d(0)$?

5°/ a) Soit J = $\int_1^{\frac{3}{2}} f(x)dx$. L'un des encadrements suivant est vrai. Lequel ?

1,5 < J < 2 ?   0 < J < 0,5 ?   2 < J < 2,5 ?

b) Soit A la partie du plan limitée par les axes(O , $\vec{i}$) et (O, $\vec{j}$) et les courbes (C_1) de h et (C').

Montrer que A = $\frac{9}{4}$ - 2 $\int_1^{\frac{3}{2}} f(x)dx$ et donner une valeur approchée de A à 0,01.

EXERCICE N° 17:

Soit la fonction numérique g d’une variable réelle définie sur$]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ par:$g(x)=\frac{1}{x}-\ln(1+\frac{1}{x})$.

1°/ a) Etudier les variations de g.

b) En déduire le signe de g (x).

2°/ Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=(1+x)\ln(\frac{1+x}{x}) & \text{si } x\in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[\\ f(-1)=0 \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Montrer que f est continue à gauche en –1, f est – elle dérivable à gauche en –1 ?

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$. (on pose $X=\frac{1}{x}$) .

c) Dresser le tableau de variation de f . d) Tracer (C).

3°/ a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, on a : $0\le g(x)\le\frac{1}{x(x+1)}$.

b) Soit la suite U_n définie sur IN* par : $U_n=\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+............+\frac{1}{2n(2n+1)}$.

Vérifier que $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$, en déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n=0$.

c) Déduire de 3°/ a) que $0\le g(n)+g(n+1)+g(n+2)+......+g(2n)\le U_n$ pour tout $n\in$ IN*

En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(n)+g(n+1)+g(n+2)+.........+g(2n)$.

d) Soit la suite V_n définie sur IN* par : $V_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+....................+\frac{1}{2n}$.

Vérifier que $g(n)+g(n+1)+g(n+2)+.........+g(2n)=V_n-\ln 2-\ln(1+\frac{1}{2n})$.

En déduire la limite de la suite V_n

EXERCICE N °18 :

A / Soit la fonction f définie sur $IR_+^*\setminus\{1\}$ par $f(x)=\ln x+\frac{1}{\ln x}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i}, \vec{j})$.

1°/ a) Montrer que f est dérivable sur $IR_+^*\setminus\{1\}$ et que $f'(x)=\frac{1}{x}(1-\frac{1}{(\ln x)^2})$.

b) Dresser le tableau de variation de f et en déduire que : $\forall x\in IR_+^*\setminus\{1\}$, $|f(x)|\ge 2$.

c) Montrer que l’équation f (x) = x admet, dans]1, e[une solution unique α. En déduire que $2<\alpha<e$

d) Etudier les branches infinies de la courbe (C) puis tracer (C).

3°/ Soit U_n la suite définie sur IN par $U_0=2$ et pour tout $n\in$ IN, $U_{n+1}=f(U_n)$

a) Montrer, par récurrence, que pour tout $n\in$ IN: $2<U_n<e$.

b) Encadrer $(\text{Log } x)^2$ sur [2 , e] et en déduire que pour tout $x\in[2,e]$, on a : $|f'(x)|\le\frac{3}{5}$.

c) Montrer que pour tout n∈IN:$|U_{n+1}-\sim|\le\frac{3}{5}|U_n-\sim|$.

En déduire que (U_n) est convergente et donner sa limite.

B / Soit Fla fonction définie sur] – 1 , 0] par : $F(x)=x\,f(x^2)$ si $-1<\alpha<0$ et $F(0)=0$

1°/ a) Etudier la continuité et la dérivabilité de F à gauche en 0 .

b) Vérifier que $\forall x\in]-1,0[$, $f(x^2)\le -2$ et que $F'(x)=f(x^2)+2-\frac{2}{(\ln x^2)^2}$.

c) Dresser le tableau de variation de F sur] – 1 , 0 [.

2°/ a) Soit n ∈ IN*, montrer que l'équation $F(x) = \frac{1}{n}$ admet, dans]-1, 0[une solution unique α_n

b) Montrer que pour tout n ∈ IN*, $\alpha_n \prec \alpha_{n+1}$ et que α_n est convergente.

c) Montrer que $\forall x \in]-1,0[$, $F(x) \geq -2x$, en déduire que $\forall n \in IN^*$, $\frac{-1}{2n} \leq \alpha_n \leq 0$ puis donner $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.

EXERCICE N °19 :

Soit f la fonction définie sur IR par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \ln(1+\frac{1}{x^2}) \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1°/ a) Montrer que f est une fonction paire.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2°/ a) Montrer que f est dérivable en 0.

b) Montrer que f est dérivable sur IR*et que pour tout x ∈ IR* on a : $f'(x) = \frac{2}{x}[f(x) - \frac{x^2}{1+x^2}]$.

3°/ a) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction : $t \to \log t$,

Montrer que pour tout x ∈ IR*, il existe un réel $c \in]x^2, 1+x^2[$ tel que $\ln(1+\frac{1}{x^2}) = \frac{1}{c}$.

b) Déduire que pour tout $x \in IR_+^*$, on a : $\frac{x^2}{1+x^2} < f(x) < 1$.

c) Déterminer alors le signe de f '(x) dans IR_+^* et dresser le tableau de variation de f .

4°/Tracer la courbe représentative (C) de f relativement à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

5°/ Pour tout n ∈ IN* , $U_n = (1+\frac{1}{n^2})^{n^2}$.

a) Exprimer U_n en fonction de f (n) .Déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = e$.

c) Montrer que la suite U_n est croissante.

6°/ On pose $V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_n$, n ∈ IN* .

a) Montrer que pour tout n ∈ IN* , $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{n(n+1)}\left(nU_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} U_k \right)$

b) Déduire que V_n est une suite croissante.

c) Montrer que pour tout n ∈ IN* , $V_n < e$ .En déduire que la suite V_n est convergente .

EXERCICE N °20 :

1°/ Démontrer que pour tout $x \in]0, \frac{1}{2}[\cup]1, +\infty[$, l'intégrale $\int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t}$ est définie.

2°/ Soit f la fonction définie sur $[0, \frac{1}{2}[\cup]1, +\infty[$ par: $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t}$ si $x \in]0, \frac{1}{2}[\cup]1, +\infty[$ et f (0) = 0.

a) Démontrer que, pour tout $x \in]0, \frac{1}{2}[\cup]1, +\infty[$, $\frac{x}{\ln 2x} \leq f(x) \leq \frac{x}{\ln x}$.

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

c) Déterminer les limites respectives de f (x) et de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers + ∞.

3°/ Démontrer que, pour tout réel $t \in 1, +\infty[$, $\ln t \leq -1 + t$, puis déduire $\lim\limits_{x\to1} f(x) = +\infty$.

4°/ Soit h la fonction définie sur]0,1[par: h (t) = 2 – 2t + ln t.

a) Dresser le tableau de variation de h.

b) Déduire que l'équation h (t) = 0 admet une solution unique α.

c) Justifier que, pour tout réel t $\in]\alpha,1[$, $\ln t \geq 2t - 2$ et calculer $\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x)$.

5°/ a) Démontrer que pour tout $x \in]0, \frac{1}{2}[\cup]1, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{\ln(\frac{x}{2})}{\ln x . \ln 2x}$.

b) Dresser le tableau de f puis construire l'allure de la courbe (C) de f.

EXERCICE N° 21 :

On considère la suite de terme général : $P_n = (1 + \frac{1}{n^2})(1 + \frac{2}{n^2}) \ldots\ldots\ldots (1 + \frac{n}{n^2})$; $n \geq 1$

1°/ Vérifier que $P_n > 0$, pour tout $n \geq 1$ .Par la suite , on pose $Q_n = \ln P_n$.

2°/ a) Démontrer que , pour tout $x > 0$: $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x$.

b) En déduire : $\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq Q_n \leq \frac{n+1}{2n}$.

3°/ En déduire que (Q_n) , puis (P_n) sont convergente et préciser leurs limites .

EXERCICE N°22 :

Soit la suite U définie par : $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1°/ °/ Montrer que $\forall\, n \geq 1$ on a : $U_n < 2$, en déduire que U est convergente.

2°/ Soit V la suite définie par $\forall\, n \geq 1$, $V_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n^2+n}$.

a) Montrer que $\forall\, n \geq 1$; $\frac{n}{n^2+n} \leq V_n \leq \frac{n}{n^2+1}$.

b) En déduire que V est convergente et donner sa limite.

EXERCICE N °23 :

Soit la fonction numérique d'une variable réelle définie sur $I = [\,3 , +\infty\,[$ par :

$$f(x) = 3 \operatorname{Log}\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - 9}}{3}\right)$$

1°/ a) Montrer que la fonction f est continue sur I.

b) Montrer que f est dérivable sur $]\,3 , +\infty\,[$ et vérifier que $f'(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x^2 - 9}}$

c) Montrer que f n'est pas dérivable à droite en 3 . Interpréter cette résultat

2°/ On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Etudier les branches infinies de la courbe (C)

b) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C)dans le repère$(O, \vec{i}, \vec{j})$

3°/ a) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque g définie sur un intervalle J à préciser.

b) Construire dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (C') représentative de g .

c) Montrer que pour $x \in J$ on a : $g(x) = \frac{3}{2}(e^{\frac{x}{3}} + e^{-\frac{x}{3}})$.

4°/ Soit la courbe (C'') d'équation dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$: $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$; $x \geq 1$.

Montrer que (C'') est l'image de (C') par la similitude indirecte S de centre O , de rapport $\frac{1}{3}$

et d'axe la droite $\Delta : y = x$

5°/ On considère la fonction h définie sur] 3 , +∞ [par $h(x) = \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$.

a) Déterminer la primitive H de h sur] 3 , +∞ [qui s'annule en 5 .

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$.

6°/ On considère la fonction φ définie sur IR par $\varphi(x) = \dfrac{e^{\frac{x}{3}} - e^{-\frac{x}{3}}}{e^{\frac{x}{3}} + e^{-\frac{x}{3}}}$.

a) Montrer que φ est une bijection de IR sur l' intervalle] – 1 , 1 [.

b) Montrer que pour tout x ∈ IR $\varphi'(x) = \frac{1}{3}\left(1 - (\varphi(x))^2\right)$.

c) Montrer que φ^{-1} est dérivable sur] –1 ,1[et donner l'expressions de h'(x) pour tout x ∈] -1 ,1 [

<u>EXERCICE N°24 :</u>

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2cm) .

Partie A :

1°/ Soit la fonction numérique f d'une variable réelle définie sur IR par : $f(x) = 1 + x + e^{-x}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Etablir le tableau de variation de f en précisant les limites de en +∞ et en -∞ .

b) Montrer que la droite Δ : y = x + 1 est asymptote à la courbe (C) et préciser la position de (C) par rapport à Δ .

c) Tracer la droite Δ et la courbe (C) .

2°/ a) Déterminer la position relative de la courbe (C) et la droite d' équation y = x – 2 .

b) Calculer l'aire de la partie du plan délimité par la courbe (C) les droite d'équation :
x = 0 et y = x - 2

Partie B :

Dans cette partie , à tout point M du plan de coordonné(x , y) , on associe son affixe z = x + iy .

Soit T l'application du plan dans lui même qui à tout point M d'affixe z associe le point M_1 d'affixe z_1 tel que $z_1 = (-1 - i)z + 1$.

a) Donner la nature de T et déterminer ses éléments caractéristiques.

b) Calculer les coordonnées x et y du point M en fonction des coordonnées x_1 et y_1 de M_1.

d) Déterminer les équations des transformées par T des droites d'équation respectives :
x = 0 et y = x-2

<u>Pour une bonne réussite</u>