## Exercice n°1:

Soit f la fonction définie sur IR \ {-2; 0} par  $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+2x}$ 

- 1°) Donner les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- $2^{\circ})$  Justifier que f est dérivable sur IR  $\setminus$  {-2 ; 0 } et calculer f'(x) .
- 3°) Donner le tableau des variations de f.
- 4°) Tracer la courbe (C) représentative de f dans un repère orthonormé d'unité 1cm.

On indiquera et on tracera les asymptotes éventuelles à la courbe.

- 5°) Montrer que la courbe (C) a un axe de symétrie D :x=-1.
- 6°) Déterminer l'équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 1

Tracer T

## **Solution:**

On a 
$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+2x}$$
  $D_f = IR \setminus \{-2; 0\}$ 

1) 
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x+1)^2}{x^2 + 2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

De même chose pour  $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ 

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{(x+1)^2}{x^2 + 2x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2^{-}} f(x) = \lim_{x \to -2^{-}} \frac{(x+1)^{2}}{x^{2}+2x} = \frac{1}{0^{+}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{(x+1)^2}{x^2 + 2x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^{-}} f(x) = \lim_{x \to 0^{-}} \frac{(x+1)^{2}}{x^{2}+2x} = \frac{1}{0^{-}} = -\infty$$

Mr:Khammour.Khalil Tél:27509639

2) f est une fraction rationnelle don elle est dérivable sur son domaine de définition IR \ {-2; 0}

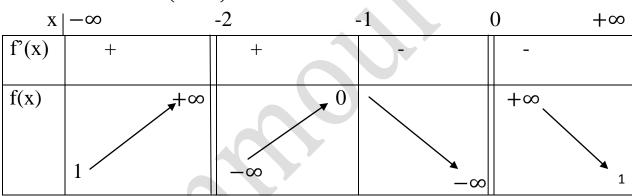
$$f'(x) = \frac{2(x+1)(x^2+2x) - (2x+2)(x+1)^2}{(x^2+2x)^2}$$

$$= \frac{2(x+1)[(x^2+2x) - (x+1)^2]}{(x^2+2x)^2}$$

$$= \frac{2(x+1)[(x^2+2x) - x^2 - 2x - 1]}{(x^2+2x)^2} = \frac{2(x+1)[-1]}{(x^2+2x)^2}$$

$$= \frac{-2(x+1)}{(x^2+2x)^2}$$

3) 
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2(x+1)}{(x^2+2x)^2} = 0 \Leftrightarrow -2(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1$$



4) 
$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{(x+1)^2}{x^2 + 2x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2^{-}} f(x) = \lim_{x \to -2^{-}} \frac{(x+1)^{2}}{x^{2}+2x} = \frac{1}{0^{+}} = +\infty$$

 $\Leftrightarrow \Delta$ : x = -2 est une asymptote verticale à  $C_f$ 

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{(x+1)^2}{x^2 + 2x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^{-}} f(x) = \lim_{x \to 0^{-}} \frac{(x+1)^{2}}{x^{2}+2x} = \frac{1}{0^{-}} = -\infty$$

 $\Leftrightarrow$  D: x = 0 est une asymptote verticale à  $C_f$ 

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$$

Mr:Khammour.Khalil Tél:27509639

 $\Leftrightarrow$  D: y = 1 est une asymptote horizontale à C<sub>f</sub>

C<sub>f</sub> admet une tangente horizontale au point d'abscisse -1

5) On a 
$$-2-x \in D_f$$
 et  $f(-2-x) = \frac{(-2-x+1)^2}{(-2-x)^2+2(-2-x)} = \frac{(-x-1)^2}{x^2+4+4x-4-2x} = \frac{(x+1)^2}{x^2+2x}$ 

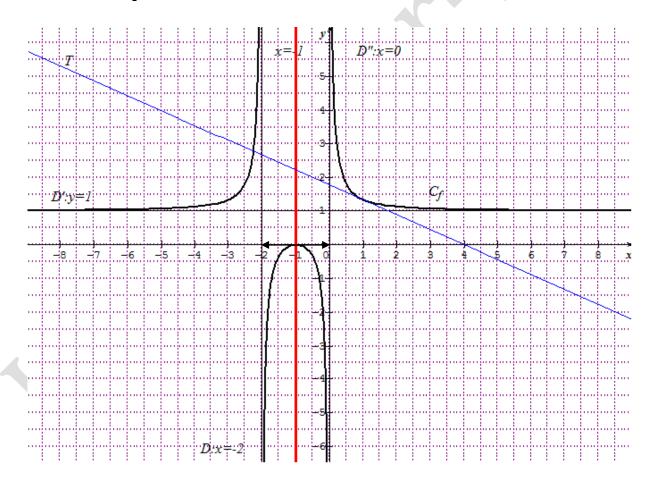
Donc f(x) = f(-2-x) et par suite x=-1 est un axe de symétrie à  $C_f$ 

6) T:
$$y=f'(1)(x-1)+f(1)$$

T:
$$y = \frac{-4}{9} x + \frac{4}{9} + \frac{4}{3}$$

$$T: y = \frac{-4}{9}x + \frac{16}{9}$$

## Traçage de C<sub>f</sub>



Mr:Khammour.Khalil Tél:27509639