Exercice n°1 :

Soit f la fonction définie sur IR \ {-2 ; 0 } par $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+2x}$

1°) Donner les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2°) Justifier que f est dérivable sur IR \ {-2 ; 0 } et calculer f'(x) .

3°) Donner le tableau des variations de f.

4°) Tracer la courbe (C) représentative de f dans un repère orthonormé d'unité 1cm.

On indiquera et on tracera les asymptotes éventuelles à la courbe.

5°) Montrer que la courbe (C) a un axe de symétrie D :x=-1.

6°) Déterminer l'équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 1

Tracer T

Solution :

On a $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+2x}$ D_f = IR \ {-2 ; 0 }

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

De même chose pour $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$

$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{x\to-2^+} \frac{(x+1)^2}{x^2+2x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x\to-2^-} f(x) = \lim_{x\to-2^-} \frac{(x+1)^2}{x^2+2x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{(x+1)^2}{x^2+2x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{(x+1)^2}{x^2+2x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

2) f est une fraction rationnelle don elle est dérivable sur son domaine de définition IR \ {-2 ; 0 }

$$f'(x) = \frac{2(x+1)\left(x^2+2x\right) - (2x+2)(x+1)^2}{\left(x^2+2x\right)^2}$$

$$= \frac{2(x+1)\left[\left(x^2+2x\right) - (x+1)^2\right]}{\left(x^2+2x\right)^2}$$

$$= \frac{2(x+1)\left[\left(x^2+2x\right) - x^2 - 2x - 1\right]}{\left(x^2+2x\right)^2} = \frac{2(x+1)[-1]}{\left(x^2+2x\right)^2}$$

$$= \frac{-2(x+1)}{\left(x^2+2x\right)^2}$$

3) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2(x+1)}{(x^2+2x)^2} = 0 \Leftrightarrow -2(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
f'(x)		+	‖	+		-	‖	-	
f(x)	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

4) $\lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{x\to-2^+} \frac{(x+1)^2}{x^2+2x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x\to-2^-} f(x) = \lim_{x\to-2^-} \frac{(x+1)^2}{x^2+2x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\Leftrightarrow \Delta : x = -2$ est une asymptote verticale à C_f

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{(x+1)^2}{x^2+2x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{(x+1)^2}{x^2+2x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\Leftrightarrow D : x = 0$ est une asymptote verticale à C_f

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$

$\Leftrightarrow D: y = 1$ est une asymptote horizontale à C_f

C_f admet une tangente horizontale au point d'abscisse -1

5) On a $-2-x \in D_f$ et $f(-2-x) = \frac{(-2-x+1)^2}{(-2-x)^2+2(-2-x)} = \frac{(-x-1)^2}{x^2+4+4x-4-2x} = \frac{(x+1)^2}{x^2+2x}$

Donc $f(x) = f(-2-x)$ et par suite $x=-1$ est un axe de symétrie à C_f

6) $T: y=f'(1)(x-1)+f(1)$

$T: y=\frac{-4}{9}x+\frac{4}{9}+\frac{4}{3}$

$T: y=\frac{-4}{9}x+\frac{16}{9}$

<u>Traçage de C_f</u>