L.S.Menzel Hayat	Série $\boxed{19}$	Afli Ahmed
$\boxed{19}$ Avril 2013	Eq.diff / Intégrales / suites / probabilités	4sc.exp

Exercice un :

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = e^{-x}$

1.Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble IR par $u(x) = x\,e^{-x}$ est une solution de l'équationdifférentielle (E).

2. On considère l'équation différentielle (E') : $y' + y = 0$.

Résoudre l'équation différentielle (E').

3. Soit v une fonction définie et dérivable sur IR. Montrer que la fonction v est une solution(E) si et seulement si la fonction $v-u$ est solution de(E').

4. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

5. Déterminer l'unique solution g de l'équation (E) telle que $g(0) = 2$.

Exercice deux :

Pour tout n ∈N , on pose $U_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}dx$

1./Montrer que $U_1 = \ln(\frac{2e}{1+e})$

2./Calculer U_0

3./Montrer que la suite (U_n) est décroissante ,en déduire qu'elle est convergente.

4./ a. Montrer que pour tout x∈[1 ;1] ; $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+e^{-x}} \leq 1$

b. En déduire que pour tout n $\in N^*$, $\frac{1-e^{-n}}{2n} \leq U_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}$

c. Calculer alors la limite de U_n

5./On pose pour tout n $\in N^*$, $V_n = \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} \frac{dx}{1-e^{-x}}$ et $S_n = \sum V_k$

a. Montrer que pour tout n $\in N^*$: $V_n = \ln(\frac{n+2}{n+1})$

b. Calculer la limite de V_n

c. Exprimer S_n en fonction de n puis calculer sa limite

Exercice trois :

Un groupe de personne décide d'aller au cinéma deux samedis de suite pour voir deux films A et B

Le 1^er^samedi , 40% des personnes vont voir le film A et les autres le film B

Le 2eme samedi :

parmi les personnes qui ont vu le film A,55% décident de revoir le film A

parmi les personnes qui ont vu le film B,85% décident de revoir le film B

On interroge au hasard une personne de ce groupe .on considère les évènements suivants :

- A_1 : « la personne a vu le film A le 1er samedi »
- B_1 : « la personne a vu le film B le 1er samedi »
- A_2 : « la personne a vu le film A le 2ème samedi »
- B_2 : « la personne a vu le film B le 2ème samedi »

1./a. Modéliser cette situation par un arbre de probabilité

b. Calculer $P(A_1 \cap A_2)$; $P(B_1 \cap A_2)$ .En déduire que $P(A_2) = 0{,}31$.

c. Le 2ème samedi ,la personne est en train de voir le film B. calculer la probabilité

qu'elle ait vu le film A le 1er samedi.

2./ Le prix du billet pour le film A est 3D et de 2D pour le film B.

On appelle X la variable aléatoire égale au cout total des séances de cinéma pour une personne

a.Déterminer la loi de X

b.Calculer E(x) et V(x)

3./On choisit d'une manière indépendante un échantillon de 15 personnes de ce groupe .

On note Y l'aléa numérique prenant pour valeur le nombre de personne qui a vu le film A, au 2èmesamedi

a. Définir la loi de probabilité de Y

b. Calculer la probabilité de Y d'avoir au moins une personne qui a vu le film A le 2ème

samedi.

c. Déterminer le nombre moyen des personnes qui ont vu le film A le 2eme samedi

Exercice quatre :

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \dfrac{1}{(1+e^{-x})^2}$

1) a) Montrer que f est une bijection de IR sur un intervalle I que l'on précisera.

   b) Montrer que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f^{-1}(x) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$.

   c) Calculer $f^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

2) On a tracer la courbe représentative (C) de f et la droite $\Delta : y = x$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.Tracer soigneusement la courbe (C') de f^{-1} dans le même repère.

3) a) Vérifier que pour tout $x \in \mathrm{IR}$, $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} - \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

   b) On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites $= 0$, $x = \alpha$ et $y = \alpha$.

   Montrer que $\mathcal{A} = \alpha^2 - \ln(\dfrac{1+e^\alpha}{2}) - \dfrac{1}{1+e^\alpha} + \dfrac{1}{2}$.En déduire $\int_{\frac{1}{4}}^{\alpha} \ln\left(\dfrac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) dx$.

   c) Déterminer en fonction de α l'aire $\mathcal{B}$ de la partie du plan limitée par les courbes (C), (C') et les deux axes du repère.