Lycée TheLepTe

2011-2012

Serie d'exerciceS n°1

Niveau : 4 ème Science expérimentales

THEMES: MathématiqUES(fonctions logarithmes-foncyions exponentielles-integrales-suites réelles

Prof : Mhamdi Abderrazek

EX1 :

Soit f et g deux fonctions définies sur]0; +∞[par f(x) =x-1+ln($\frac{x}{x+1}$)

et g(x) =x ln($\frac{x}{x+1}$)-ln(x+1)et C_f la courbe de f dans un repère orthonormé (o ;$\vec{\imath}$;$\vec{\jmath}$)

1). Dresser le tableau de variation de f sur]0; +∞[

2).a). Montrer que l'équation f(x)=0 admet dans]0; +∞[une unique solution x_0.

b).Vérifier que 1,5< x_0 <1,6

3).a). Montrer que **D :**y=x-1est une asymptote à C_f

b). Etudier la position relative de **D** et C_f

c). Tracer C_f dans le repère (o ;$\vec{\imath}$;$\vec{\jmath}$)

4). Soit **A** l'aire de la partie du plan limitée par les droites d'équations :x=1 ;x=3 et la droite **D** et la courbe C_f

Calculer g'(x) en déduire la valeur de **A.**

5).a). Montrer que f réalise une bijection de]0; +∞[sur un intervalle J que l'on précisera

b). Tracer la courbe de la réciproque f^{-1} de f dans le même repère

c). Dresser le tableau de variation de f^{-1}

d).Déterminer une équation de la tangente à $C_{f^{-1}}$ au point d'abscisse (-ln(2)).

6). Soit les suites réelles $(U_n) et (S_n)$ définies surIN^*par :

$U_n = f(n) - 1 + n$ et$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

Calculer les limites de($U_n) et (S_n)$.

EX2 :

Soit la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=\frac{2x^2}{x^2+1}-\ln(x^2+1)$ et f la fonction .

. définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(0)=0$ et $f(x)=\frac{\ln(x^2+1)}{x}$ si $x>0$ et C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(o;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1).a). Dresser le tableau de variation de g sur $[0;+\infty[$

b). Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans $[0;+\infty[$ exactement deux solutions l'une est nulle et l'autre $\alpha>0$ et vérifier que $\alpha\in\,]1;2[$.

c). Déterminer alors le signe de $g(x)$ sur $[0;+\infty[$.

2).a). Montrer que f est continue à droite en 0.

b). Montrer que f est dérivable à droite en 0.

3).a). Ecrire une équation de la tangente **T à** C_f au point O

b). Montrer que $\ln(x+1)\leq x\ \forall\ x>0$. En déduire la position de **T** et C_f .

4).a). Montrer que $f(\alpha)=\frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$

b). Montrer que $f'(x)=\frac{g(x)}{x}\quad\forall\ x>0$.

c). Dresser le tableau de variation de f sur $[0;+\infty[$

d). Tracer C_f dans le repère $(o;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

EX3 :

Soit f la fonction définie par $f(x)=\ln\left|\ln|x|\right|$ et C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(o;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1). Dresser le tableau de variation de f.

2). Tracer C_f dans le repère $(o;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

3). Soit g la restriction de f à l'intervalle $]1;+\infty[$.

a). Montrer que f réalise une bijection de $]1;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera

b). Tracer la courbe de la réciproque f^{-1} de f dans le même repère où f^{-1} est la réciproque de f

c). Expliciter $f^{-1}(x)\ \forall\ x\in J$.

d). Dresser le tableau de variation de f^{-1} sur J.

EX4 :

1). On considère la fonction g définie sur IR par g(x)=xe^{-x}

a). Dresser le tableau de variation de g sur IR

b).Démontrer que $e^x \neq$ x ∀ x∈ IR

c). Tracer $\boldsymbol{C_g}$,la courbe de g, dans un repère orthonormé (o ;$\vec{u}$;$\vec{v}$).

d). Calculer **A** l'aire de la partie du plan limitée par les droites d'équations :x=0 ;x=1 ;y=0 et la courbe$\boldsymbol{C_g}$.

2). on considère la fonction f définie par :f(x)=$\frac{e^x}{e^x-x}$

a). Montrer que f est définie et dérivable sur IR

b). Dresser le tableau de variation de f sur IR

c). Tracer $\boldsymbol{C_f}$,la courbe de f, dans un repère orthonormé (o ;$\vec{\imath}$;$\vec{\jmath}$).

EX5 :

Soit n un entier naturel On considère la fonction f_n définie sur [0 ;1] par :
f_0(x)=$\sqrt{1-x}$ etf_n(x)=$x^n\sqrt{1-x}$ si n>0 et on pose $I_n=\int_0^1 f_n$(x)dx ∀ n∈ IN

1). Justifier l'existence de I_n ∀ n∈ IN

2).a). Montrer que 0≤ $I_n \leq \frac{1}{n+1}$

b). Montrer que (I_n) est convergente et calculer sa limite.

3).a). Calculer I_0

b). Montrer que $I_{n+1}=\frac{2n+2}{2n+5}I_n$

c). Calculer I_1 ; I_2 *et* I_3

EX6 :

1). Soit la fonction f définie sur [0; +∞[par f(0)=0 et f(x)=$\frac{x\ln(x)}{x^2+1}$ si x> 0

a). Montrer que f est continue à droite en 0.

b). En déduire que f est continue sur [0; +∞[

2). On considère la fonction **F** définie sur [0; +∞[par **F(x)=**$\boldsymbol{\int_1^x f(t)dt}$

Montrer que **F** est dérivable sur $[0;+\infty[$ et calculer **F'(x)** $\forall x \in [0;+\infty[$

3).a). Calculer $\int_1^x \frac{\ln(t)}{t}dt$ $\forall x \in [1;+\infty[$

b). Montrer que $\forall t \in [1;+\infty[$ on a : $\frac{\ln(t)}{2t} \leq f(t) \leq \frac{\ln(t)}{t}$

c). En déduire que $\forall x \in [1;+\infty[$ on a : $\frac{\ln^2(x)}{4} \leq \mathbf{F(x)} \leq \frac{\ln^2(x)}{2}$

d). Calculer alors la limite de **F(x)** quand x tend vers $+\infty$

4).a). Dresser le tableau de variation de **F** sur $[0;+\infty[$ (on ne demandera pas de préciser **F(0)**)

b). Préciser la nature de la branche parabolique à la courbe de **F.**

EX7 :

1). On considère la fonction g définie sur IR par $g(x)=(x+1)^2e^{-x}$ et C_g ,sa courbe , dans un repère orthonormé $(o\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

a). Dresser le tableau de variation de g sur IR

b). Tracer C_g dans le repère $(o\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$

c). Montrer que l'équation g(x)=2 admet dans IR une unique solution α et que

. $\alpha \in J=[-2\,;-1]$ et que $\alpha=-1-\sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$

2). Soit f la fonction définie sur J par $f(x)=-1-\sqrt{2}e^{\frac{x}{2}}$

a). Dresser le tableau de variation de f sur J

b). En déduire que $f(x) \in J$ $\forall x \in J$

c). Montrer que $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ $\forall x \in J$

3). Soit la suite (u_n) définie sur IN par $u_0=-\frac{3}{2}$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ $\forall n \in$ IN

a). Montrer que $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$ $\forall n \in$ IN

b). En déduire que $|u_n-\alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

c). Prouver alors que (u_n) converge vers une limite à préciser.

BON TRAVAIL