Série d'exercices n°17 : **Classe : 4^{ième} sc.exp.**

Exercice n°1 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O ;\vec{i} ;\vec{j} ;\vec{k})$.

Soit S l'ensemble des points M(x ;y ;z) de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2-4x+2y+6z-11=0$

Et les points $A(2;3;0)$, $B(6;2;-3)$et $C(-2;-1;0)$

1. Montrer que S est la sphère de centre I(2 ;-1 ;-3) et de rayon R = 5
2. a- Montrer que A, B et C ne sont pas alignés.
   b- calculer l'aire du triangle ABC..
   c- Montrer qu'une équation du plan P passant par les points A, B et C est $3x-3y+5z+3=0$.
3. Montrer que le plan P coupe S en un cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le rayon.
4. Soit le plan Q :$x-2y-2z+5=0$
   a- Montrer que Q est tangent à la sphère S. Déterminer les coordonnées du point de contact H.
   b- Montrer que A, B, C et H forment un tétraèdre inscrit dans la sphère S.
   c- Calculer le volume du tétraèdre ABCH.

Exercice n°2 :

Soit (I_n)la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par$I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$:

1. a- Calculer I_1
   b- montrer que la suite I est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.
   c- montrer que pout tout n≥1on a $0\leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$
2. a- Vérifier que pour tout n≥ 3 $I_n=\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}dx - I_{n-2}$
   b- En déduire que $nI_n=\sqrt{2}-(n-1)I_{n-2}$
   c- Calculer I_3.

Exercice n°3 :

Soit la fonction f définie sur [-1 ;+∞[par $f(x) = x-2\sqrt{x+1}$

On désigne par Cf sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. a- Etudier la dérivabilité de f à droite en (-1) .Interpréter le résultat obtenu.
   b- Montrer que $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+1)}$
2. a- Dresser le tableau des variations de f.
   b- Calculer $\lim_{+\infty} f(x)-x$.Interpréter le résultat obtenu.
   d- Tracer la courbe Cf.
3. Soit h la restriction de f sur [0 ;+∞[et C' sa courbe .
   a- Montrer que h réalise une bijection de [0 ;+∞[sur un intervalle J que l'on déterminera.
   b- Calculer $h^{-1}(-1)$.Montrer que h^{-1}est dérivable en (-1) et calculer $(h^{-1})'(-1)$
   c- Ecrire une équation de la tangente T à C' au point d'abscisse (-1)
   d- Tracer C' et T dans le même repère.
4. Calculer l'aire de la partie du plan limité par cf , la droite D :$y=x$ et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=3$

Série d'exercices n°16 : **Classe : 4^{ième} sc.exp.**

Exercice n°1

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O ;\vec{i} ;\vec{j} ;\vec{k})$.

On considère les points $A(3;2;4)$, $B(0;3;5)$, $C(0;2;1)$ et $D\ (3;1;0)$.

1. a- Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}$
   b- Montrer que ABCD est un parallélogramme et calculer son aire.
2. Soit S l'ensemble des points m(x ;y ;z) de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2-4x+4y-10z+15=0$
   Montrer que S est la sphère de centre I(2 ;-2 ;5) et de rayon R = $3\sqrt{2}$
3. Soit P le plan passant par les points A, B et D.
   a- Vérifier que $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD})$
   b- Montrer que le plan P est tangent à la sphère S au point A.
4. Soit le point E (2 ; 1 ;2)
   a- Vérifier que E est un point de S.
   b- Déterminer une équation cartésienne du plan Q qui coupe S en un cercle de diamètre [AE].

Exercice n°2

On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$:$I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}dx$:

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ $\frac{1}{3(n+1)}\leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$
2. En déduire que I_n converge vers un réel que l'on déterminera.
3. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$$I_n=\frac{1}{3(n+1)}+\frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}(1+2x)}{(1+x+x^2)^2}dx$
4. En déduire que pour tout n≥ 1 on a $1+\frac{1}{3(n+2)}\leq 3(n+1)I_n \leq 1+\frac{9}{n+2}$
5. Calculer alors $\lim_{+\infty} nI_n$

Exercice n°3

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par$f(x)=x+\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$. On désigne par Cf sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Etudier la parité de f.
2. Dresser le tableau des variations de f.
3. Montrer que la droite D : y = x+2 est une asymptote oblique à Cf au voisinage de +∞
4. Déterminer une équation de la tangent T à Cf au point O
5. Tracer T et Cf.
6. Calculer l'aire de la partie du plan limité par cf , la droite D et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$