LYCEE D'INDEPENDANCE
OUED ELLIL
ANNEE SCOLAIRE :2011-2012
PROF : BELLASSOUED MOHAMED

EXERCICE 1

Mettre sous forme algébriques les nombres complexes suivants :

$$z_1=\frac{3+6i}{3-4i}\quad ;\quad z_2=\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2+\frac{1-7i}{4+3i}\quad ;\quad z_3=\frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}$$

EXERCICE 2

Mettre sous forme trigonométriques les nombres complexes suivants :

$$z_1=\frac{3}{1-i}\quad ;\quad z_2=\frac{(1+i)^3}{1-i}+\frac{(1-i)^4}{(1-i)^2}\quad ;\quad z_3=\frac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1+i)}{1-i}$$

EXERCICE 3

Soient θ et θ' deux nombres réels

1- Transformer $e^{i\alpha}+e^{i\beta}$ (en factorisant par $e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$) sous la forme $\rho e^{i\theta}$ ou ρ et θ sont des réels

2- En déduire la forme exponentielle des nombres complexes suivants

$$z_1=1+e^{i\frac{\pi}{3}}\ ,\ z_2=e^{i\frac{4\pi}{3}}-1\ ,\ z_3=i+e^{i\theta}\ ,\ z_4=e^{i\theta}+e^{i2\theta}\ ,\ z_5=\frac{e^{i\frac{\pi}{6}}-i}{e^{i\frac{\pi}{3}}+1}$$

EXERCICE 4

Simplifier les nombres complexes suivants

$$z_1=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{10}\qquad z_2=(1+i\sqrt{3})^{10}+(1-i\sqrt{3})^{10}$$

EXERCICE 5

Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

1- $z_1=(1+i\tan\alpha)^2\quad ,\quad \alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

2- $z_2=\dfrac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{1-\cos\alpha-i\sin\alpha}\quad ,\ \alpha\in\left]0,2\pi\right[$

3- $z_3=\dfrac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{\sqrt{1+\sin2\alpha}+i\sqrt{1-\sin2\alpha}}\quad ,\ \alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

EXERCICE 6

1-Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants $z_1=\frac{1}{2}(\sqrt{6}-i\sqrt{2})$ et $z_2=1-i$

2- En déduire l'écriture trigonométrique de $\dfrac{z_1}{z_2}$ puis les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$

EXERCICE 7

Déterminer et représenter dans chaque cas, l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie :

1- $|z-3|=|z-3i|$

2- $|2-3i+z|=|2+3i|$

3- $|\bar{z}-4+i|=1$

4- $\arg(\bar{z})=\arg(-z)(2\pi)$

5- $(1-z)(1-iz)$ soit réel

6- $(1-z)(1-iz)$ soit imaginaire pur

7- $\left|\dfrac{z-1}{z-3}\right|=\dfrac{1}{2}$

8- $iz\in\mathbb{R}_+$

9- $\arg(z)=\arg(z+3+i)$

10- $z^2+\bar{z}^2=0$

11- les points d'affixes 1 , z et $1+z^2$ sont alignes

12- z^2 , 1-z et $\bar{z}$ ont la même module

13- $\mathrm{Re}(z^3)=\mathrm{Im}(z^3)$

14- $|z-i|^2+|z+i|^2=4$

EXERCICE 8

Linéarise r $\cos^5 x$ et $\sin^5 x$.

EXERCICE 9

Soit un complexe $z \in \mathbb{C}\setminus\{-1,0,1\}$ et les points A(+1) , A'(-1) , M(z) , $M'\left(\frac{1}{z}\right)$ et $P\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)$

Montrer que la droite (MM') est bissectrice de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PA'}}\right)$

EXERCICE 10

Vérifier que $\tan nx = \dfrac{\mathrm{Im}((1+i\tan x)^n)}{\mathrm{Re}((1+i\tan x)^n)}$. exprimer tan3x et tan4x en fonction rationnelle de tanx

EXERCICE 11

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 8cm)

On appelle A le point d'affixe -1 et B le point d'affixe 1

A tout point M d'affixe $z \in \mathbb{C}\setminus\{-1,0,1\}$, on associe le point N d'affixe z^2 et le point P d'affixe z^3

1- Montrer que les points M , N et P sont deux a deux distinctes
2- On se propose de déterminer l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M du plan tels que le triangle MNP soit rectangle en P

   a-démontrer que le triangle MNP soit rectangle en P si et seulement si $|z+1|^2+|z|^2=1$

   b-démontrer que $|z+1|^2+|z|^2=1$ si et seulement si $\left(z+\frac{1}{2}\right)\overline{\left(z+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{4}$

   c-en déduire l'ensemble $\mathscr{C}$ cherché

EXERCICE 12

On considère un plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 4 cm.

1- Déterminer l'ensemble $\mathscr{A}$ des points M d'affixe z tels que $z^2=\overline{z}^2$. Tracer $\mathscr{A}$.

2- Soit $\mathscr{B}$ l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z^3=\overline{z}^2$.

   a- Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $|z^3|=|\overline{z}^2|$.

   b- En déduire l'ensemble $\mathscr{B}$

3-Déterminer l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M d'affixe z tels que $z\overline{z}-(1+i)\overline{z}-(1-i)z=0$. Construire $\mathscr{C}$.

   On pourra poser $Z=z-(1+i)$ et calculer le produit $Z\overline{Z}$.

EXERCICE 13

Dans le plan complexe rapport au repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ direct, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A=1+i$ et $z_B=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$. On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.

1. Donner la forme trigonométrique de z_A et celle de z_B.
2. Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de $\mathscr{C}$ d'affixe $e^{i\alpha}$, $\alpha\in[0;2\pi]$.

   On considère l'application f qui tout point M de $\mathscr{C}$, associe $f(M)=MA\times MB$

   a. Montrer, pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, l'égalité suivante : $e^{i2\alpha}-1=2ie^{i\alpha}$.

   b. Montrer l'égalité suivante : $f(M)=\left|e^{i2\alpha}-1-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}\right|$.

   c. En déduire l'égalité suivante : $f(M)=\sqrt{\frac{1}{4}+\left(-\frac{3}{2}+2\sin\alpha\right)^2}$.

3. a- pour quelles points M de $\mathscr{C}$, f (M) est maximal. Donner cette valeur maximale

   b- pour quelles points M de $\mathscr{C}$, f (M) est minimal. Donner cette valeur minimale

EXERCICE 14

Soit $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. on pose $S_n=\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}$

Montrer que $S_n=\operatorname{cotan}\frac{\pi}{2n}$. en déduire les valeurs de $\tan\frac{\pi}{8}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}$

VRAI - FAUX

Dans chacun des exercices suivants répondre par vrai ou faux a chaque question on justifiant ta réponse

EXERCICE 15

Dans le plan complexe P, on considère les points : $I(2+i)$, $J(1+3i)$, $K(3+3i)$. Alors :

1. Il existe un point $M(z)\in P$ tel que IJMK soit un parallélogramme.
2. Il existe un point $M(z)\in P$ tel que IJMK soit un carré.
3. pour tout point M(z) du plan , $JM=MK$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z)=2$.
4. pour tout point M(z) du plan , si le triangle JMK est équilatéral alors $\mathrm{Re}(z)=2$.
5. pour tout point M(z) du plan , si $z-(3+3i)=e^{i\frac{\pi}{3}}(z-1-3i)$ lors le triangle JMK est équilatéral.

EXERCICE 16

On considere le nombres complexe z : $z=1-\tan^2\alpha+2i\tan\alpha$; $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{4},0\right[$

a. $\mathrm{Re}(z)\succ 0$ b. $|z|=1+\tan^2\alpha$ c. $\mathrm{Arg}(z)=\alpha+2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$. d. $\mathrm{Im}(z)=(1+\tan^2\alpha)\sin 2\alpha$

e. $\mathrm{Re}(z)=(1+\tan^2\alpha)\cos\alpha$

EXERCICE 17

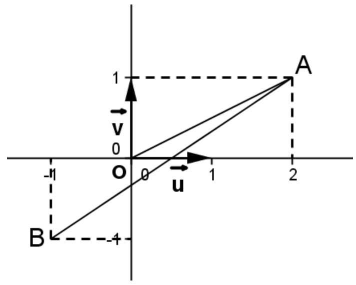
Soit $\theta\in]0;\pi[$, et z_1, z_2 les deux nombres complexes définis par : $\begin{cases} z_1=1-\cos\theta+i\sin\theta \\ z_2=-1+i \end{cases}$; on a :

a. $|z_1|=2\sin\frac{\theta}{2}$. b. $\arg z_1=\frac{\pi-\theta}{2}$. c. $z_2=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

d. $z_1z_2=2\sqrt{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$. e. $\frac{z_1}{z_2}=\sqrt{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$.

EXERCICE 18

les points A et B sont définies comme si contre

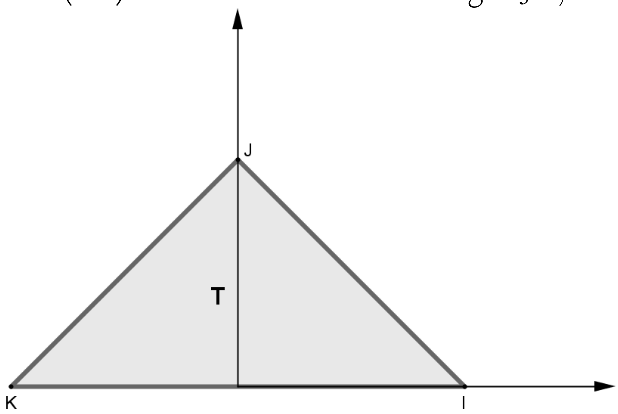


l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

1- $|z-2-i|=\sqrt{5}$ est le cercle de centre O et de rayon OA
2- $|z-2-i|=|z+1+i|$ est la médiatrice du segment $[AB]$
3- $\mathrm{Arg}(z-2-i)=\frac{\pi}{2}(\mathrm{mod}\,2\pi)$ est la droite d'équation x=2
4- $\mathrm{Arg}\left(\frac{z-2-i}{z+1+i}\right)=\frac{\pi}{2}(\mathrm{mod}\,2\pi)$ est le cercle de diamètre $[AB]\setminus\{A,B\}$
5- $\frac{z-2-i}{z+1+i}$ est réel est la droite $(AB)\setminus\{B\}$

EXERCICE 19

Dans le plan complexe P, on considère les points I(1), J(i) et K(−1). T est l'intérieur du triangle IJK, triangle compris. Pour tout point M(z) du plan complexe, on a :



1. $M\in[I;J]$ équivaut à :
   il existe $x\in[0;1]$, $z=x+i(1-x)$.
2. $M\in[I;J]$équivaut à :
   il existe $\theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $z=\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}e^{i\theta}$
.
3. $M\in[K;J]$ équivaut à :
   il existe $r\in[0;1]$, $z=\sqrt{2}\,re^{i\frac{\pi}{4}}-1$.
4. $M\in[K;J]$équivaut à : il existe $\theta\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$, $z=\frac{1}{\cos\theta-\sin\theta}e^{i\theta}$.
5. $M\in T$ équivaut à : $0\le\mathrm{Im}(z)\le 1$ et $\mathrm{Im}(z)-1\le\mathrm{Re}(z)\le 1-\mathrm{Im}(z)$.

EQUATIONS DANS $\mathbb{C}$

EXERCICE 20

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1 . $z^2+25=0$ 2 . $3z^2-z-2=0$ 3 . $z+2\bar{z}=3-4i$ 4. $z^3+2z^2+z+2=0$ 5. $z^4+2z^2+1=0$

EXERCICE 21

Soit z un nombre complexe qui ne soit pas un réel négatif $\left(z\in\mathbb{C}\setminus\{\mathbb{R}^-\}\right)$

En développant $(z+|z|)^2$, montrer que $z=\left(\dfrac{z+|z|}{\sqrt{2\operatorname{Re}(z)+2|z|}}\right)^2$

Application : donner rapidement les racines deuxièmes de $5+12i$

EXERCICE 22

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

1) $z^2-(5-i)z+8-i=0$. 2) $z^2+4(i-1)z+2(4-i)=0$. 3) $z^2+(1-3i)z-2(1+i)=0$. 4) $z^2-2i\bar{z}-6=0$

5) $iz^2+(4i-3)z+i=5$ 6) $z^4+6z^2+25=0$ 6) $z^4-8(1+i)z^2+16i-12=0$ 7) $(z^2-4z+5)^2+(z+1)^2=0$

EXERCICE 23

Déterminer les racines cubiques de : $Z_1=4\sqrt{2}(1+i)$, $Z_2=\dfrac{4+4i}{i+\sqrt{3}}$, $Z_3=\dfrac{i+\sqrt{3}}{i-\sqrt{3}}$

EXERCICE 24

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

1. $z^5=1$ 2. $z^4=\dfrac{16\sqrt{2}}{1-i}$ 3. $z^6-(1+2i)z^3+3(1+i)=0$ 4. $z^7=1+i\sqrt{3}$ 5. $z^7=\bar{z}$ 6 . $z^6\bar{z}=1$

EXERCICE 25

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6=-1$ puis factoriser le polynôme $P(x)=x^6+1$ en un produit de trois polynômes a coefficients réels

EXERCICE 26

On considère le polynôme P(z) suivant : $P(z)=z^3+9iz^2+2(6i-11)z-3(4i+12)$

1- Démontrer que l'équation $P(z)=0$ admet une solution réelle z_1
2- Déterminer un polynôme Q(z) tel que $P(z)=(z-z_1)Q(z)$
3- Démontrer que l'équation $Q(z)=0$ admet une solution imaginaire pur z_2
4- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l' équation $P(z)=0$
5- On note z_3 la 3ième solution de l' équation $P(z)=0$. démontrer que les points du plan complexe A,B et C d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3 sont alignés

EXERCICE 27

On considère le polynôme P(z) suivant : $P(z)=z^3+2\left(\sqrt{2}-1\right)z^2+4(1-\sqrt{2})z-8$

1- Calculer P(2). Déterminer une factorisation de P(z) par (z-2)
2- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l' équation $P(z)=0$

   On appelle z_1 et z_2 les solutions de l'équation autres que 2, z_1 ayant une partie imaginaire positive . Vérifier que $z_1+z_2=-2\sqrt{2}$. Déterminer le module et un argument de z_1 et de z_2

3- a- placer dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 2cm) les points : A d'affixe 2 , B et C d'affixes respectives z_1 et z_2, et I le milieu de [AB]

   b- démontrer que le triangle OAB et isocèle . en déduire une mesure de l'angle $\widehat{(\vec{u},\overrightarrow{OI})}$

   c- calculer l'affixe z_I de I , puis le module de z_I

   d- déduire des résultats précédents les valeurs exactes de $\cos\dfrac{3\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{3\pi}{8}$

EXERCICE 28

Soit m un complexe et α,β les deux solutions de l'équation $z^2+2mz+1=0$

Prouver l'égalité : $|\alpha|+|\beta|=|m-1|+|m+1|$

EXERCICE 29

α étant un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;2\pi]$ et z un nombre complexe, on considère le polynôme P(z), défini par : $P(z)=z^3-(1-2\sin\alpha)z^2+(1-2\sin\alpha)z-1$.

1- a. Calculer P(1).
   b. En déduire l'existence de trois réels a, b, c tels que $P(z)=(z-1)(az^2+bz+c)$. Déterminer a, b et c.
   c. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation P(z) = 0.

2. On considère trois nombres complexes : $z_1=1$; $z_2=-\sin\alpha+i\cos\alpha$; $z_3=-\sin\alpha-i\cos\alpha$.
   Déterminer le module et un argument de chacun de ces nombres complexes z_1, z_2 et z_3.

EXERCICE 30

Soit $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, et l'équation (E) : $(1+iz)^3(1-i\tan\alpha)=(1-iz)^3(1+i\tan\alpha)$

1- montrer que , si z est solution de (E) , alors $|1+iz|=|1-iz|$, puis déduire que z est réel

2- montrer que $\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}=e^{2i\alpha}$

3- chercher toutes les solutions de(E) sous la forme tan(…)

EXERCICE 31

1- soit $\alpha\in\mathbb{C}$ et $\theta\in[0,\pi]$. déterminer les racines z_1, z_2, z_3 et z_4 de l'équation :

$$z^4+2\alpha^2(1+\cos\theta)\cos\theta.z^2+\alpha^4(1+\cos\theta)^2=0$$

2- calculer la valeur de $S_n=z_1{}^n+z_2{}^n+z_3{}^n+z_4{}^n$ ou n désigne un entier naturel .

3- déterminer une CNS portant sur n , afin que $S_n=0$

EXERCICE 32 : EXTRAIT DU BAC TUNISIEN

Dans l'ensemble des nombres complexes on considère l'équation

$E_d : z^3+(3-d^2)z+2i(1+d^2)=0$, ou d est un nombre complexe de module 2

1- a vérifier que 2i est une solution de E_d
   b- résoudre alors l'équation E_d

2- dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A,B ,M et N d'affixes respective 2i ; -i ;-i+d ; -i-d
   a- calculer MN et déterminer le milieu de $[MN]$
   b- en déduire que lorsque d varie ; les points Met N appartiennent a un cercle fixe que l'on précisera
   c- dans le cas ou AMN est un triangle ; montrer que O est le centre de gravite du triangle AMN
   d- en déduire les valeurs de d pour les quelles le triangle AMN est isocèle de sommet principal A

EXERCICE 33 : EXTRAIT DU BAC TUNISIEN

θ est un réel de l'intervalle $[0,2\pi[$; on pose pour tout nombre complexe z
$f_\theta(z)=z^2-(i+e^{i\theta})z+(1+i)(-1+e^{i\theta})$ tout nombre

1- a- vérifier que $f_\theta(1+i)=0$
   b- en déduire les solution z' et z'' dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f_\theta(z)=0$

2- dans le plan complexe rapporté a un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A,B et M d'affixes respectives -1 , $i\sqrt{3}$ et $-1+e^{i\theta}$
   a- montrer que lorsque θ varie dans $[0,2\pi[$, M varie sur un cercle $\mathscr{C}$ de centre A dont on précisera le rayon
   b- déterminer les valeurs de θ pour les quelles la droite (BM) est tangente au cercle $\mathscr{C}$

EXERCICE 34 : EXTRAIT DU BAC TUNISIEN

1- a- résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2-\sqrt{3}z+1=0$

b-écrire les solutions trouvées sous forme exponentielle

c- résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^4-\sqrt{3}Z^2+1=0$

2- soit θ un réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

a- on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-(2\sin\theta)z+1=0$

vérifier que $e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ et $e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ sont solution de (E)

b- résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^4-(2\sin\theta)Z^2+1=0$

EXERCICE 35 : EXTRAIT DU BAC TUNISIEN

Soit a un nombre complexe non nul et (E) l'équation $z^2-2z+1+a^2=0$

1- résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E)

2- le plan complexe étant rapporté a un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A,B d'affixes respectives $1+ia$ et $1-ia$. On pose $a=a_1+ia_2$; a_1 et a_2 deux réels

a- montrer que les points O , A et B sont alignés si et seulement si $a_1=0$

b- montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux si et seulement si $|a|=1$

3- on pose $a=e^{i\alpha}$ ou $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

a- vérifier que pour tout réel x , on a $1+e^{ix}=2\cos\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}$ et $1-e^{ix}=-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}$

b- en déduire l'écriture sous forme exponentielle de chacun des nombres complexes $1+ia$ et $1-ia$.

c- déterminer a pour que les points O , A et B forment un triangle isocèle rectangle en O .

EXERCICE 36 : EXTRAIT DU BAC TUNISIEN

1- soit θ un réel de l'intervalle $[0,\pi[$

résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2iz-1-e^{2i\theta}=0$

2- Dans plan complexe étant rapporté a un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A,M et N d'affixes respectives $-1+i$; $i+e^{i\theta}$ et $i-e^{i\theta}$ ou θ un réel de l'intervalle $[0,\pi[$

a- Montrer que les que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont orthogonaux

b- Montrer que lorsque θ varie dans $]0,\pi[$, les points M et N varient sur un cercle $\mathscr{C}$ que l'on déterminera

3- a- déterminer en fonction de θ l'aire $\mathscr{A}(\theta)$ du triangle AMN

b-déterminer la valeur de θ pour la quelle l'aire A (θ) est maximale et placer dans ce cas les points M et N sur le cercle $\mathscr{C}$

EXERCICE 37 :EXTRAIT DU BAC TUNISIEN

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante (E) suivante $(E): z^3-2(\sqrt{3}+i)z^2+4(1+i\sqrt{3})z-8i=0$

1- a- montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pur que l'on déterminera

b-résoudre (E) dans $\mathbb{C}$

c-donner la forme exponentielle de chacune des solutions de (E)

2- soit θ un réel et E_θ l'équation $(E_\theta): z^3-2e^{i\theta}(\sqrt{3}+i)z^2+4e^{2i\theta}(1+i\sqrt{3})z-8ie^{3i\theta}=0$

a- montrer que $(ze^{-i\theta})$est une solution de (E) si et seulement si z est solution de E_θ

b- en déduire les solutions de l'équation (E_π) suivante : $z^3+2(\sqrt{3}+i)z^2+4(1+i\sqrt{3})z+8i=0$

3- représenter dans le plan rapporté a un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ les images des solutions des équations (E) et (E_π) et vérifier quelles sont les sommets d'un polygone régulier

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT
SESSION DE JUIN 2011

SESSION PRINCIPALE

SECTION : FILIERES SCIENTIFIQUES

EPREUVE : MATHEMATIQUES **DUREE : 3 heures** **COEFFICIENT : 3**

Exercice 1 (6 points) SCIENCES DE L'IFORMATIQUE

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E): $z^3 + iz^2 - 2z + 4i = 0$.

1) a) Vérifier que i est une solution de l'équation (E).
   b) En déduire que z est solution de (E) si et seulement si $z = i$ ou $z^2 + 2iz - 4 = 0$.
2) a) Résoudre l'équation (E).
   b) Écrire les solutions sous forme exponentielle.
3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives i, $\sqrt{3}-i$ et $-\sqrt{3}-i$.
   a) Placer les points A, B et C dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.
   b) Montrer que le triangle ABC est isocèle de sommet principal A.

Exercice 2 (5 points) SCIENCES EXPERIMENTALES

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives $a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

1) a) Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes a et b.
   b) Vérifier que $b^2 = a$.

2) Soit C le point d'affixe $c = a + b$.
   a) Placer les points A, B et C.
   b) Vérifier que $c = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

3) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 + z - c = 0$.
   a) Vérifier que b est une solution de l'équation (E).
   b) On désigne par d la deuxième solution de l'équation (E).

   Montrer que $d = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}e^{i\left(\frac{-11\pi}{12}\right)}$

   c) Placer alors, le point D d'affixe d.

Exercice 3 (5 points) SCIENCES TECHNIQUES

1) Montrer que $ie^{i\frac{\pi}{6}} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$.

2) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$(E):\ z^2 - 2(e^{i\frac{\pi}{12}})z + (1-i)e^{i\frac{\pi}{6}} = 0.$$

3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

   On considère les points A, B et C d'affixes respectives $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $e^{i\frac{\pi}{12}}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{12}}$.

   a) Montrer que le quadrilatère $OACB$ est un losange.

   b) Placer les points les points A, B et C dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

   c) Calculer l'aire du losange $OACB$.

EXERCICE 4 (6 points) MATHEMATIQUES

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère le point A d'affixe (-1) et les points M, N et P d'affixes respectives z, z^2 et z^3 où z est un nombre complexe non nul différent de (-1) et de 1 .

1) a) Montrer que :

(le triangle MNP est rectangle en P) si et seulement si ($\frac{1+z}{z}$ est imaginaire pur).

b) On pose $z = x + iy$ où x et y sont des réels. Montrer que $\frac{1+z}{z} = \frac{x^2+y^2+x-iy}{x^2+y^2}$.

c) En déduire que l'ensemble des points M tels que le triangle MNP soit un triangle rectangle en P est le cercle (Γ) de diamètre [OA] , privé des points O et A.

2) Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe, on a tracé le cercle (Γ) et on a placé un point M d'affixe z sur (Γ) et son projeté orthogonal H sur l'axe $(O,\vec{u})$.

On se propose de construire les points N et P d'affixes respectives z^2 et z^3 tels que le triangle MNP soit rectangle en P.

a) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)[2\pi]$ puis que $\left(\widehat{\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OP}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)[2\pi]$.

b) Montrer que $OH = OM^2$.

c) Donner un procédé de construction des points N et P puis les construire .

EXERCICE 4 : figure 2