SUJET 1

Thèmes :

Fonction Logarithme
Espace
Calcul intégral
Suites réelles

EXERCICE 1 :

Répondre par vrai ou faux.

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles

a) Si la suite $(u_n + v_n)$ converge alors (u_n) et (v_n) convergent

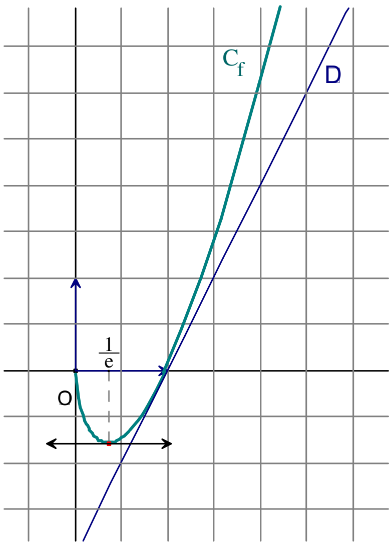
b) Si (u_n) est positive et décroissante donc elle converge vers un réel positif ou nul

c) Si (u_n) est bornée alors elle est convergente.

d) Si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge alors les suite (u_n) et (v_n) convergent.

EXERCICE 2 :

La courbe ci-contre est la représentation graphique dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [.La droite D est sa tangente au point d'abscisse 1.



1) Par lecture graphique :

a) Donner les valeurs de f(1) ; $f\left(\frac{1}{e}\right)$; $f'\left(\frac{1}{e}\right)$ et $f'(1)$

b) Etudier les variations de f sur l'intervalle]0 ; 3]

2) La fonction f est définie sur]0 ; + ∞ [par $f(x) = ax\ln x + b\ln x$ où a et b sont des réels.

a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de a et b.

b) Déterminer alors les valeurs de a et b en utilisant le graphique ci-dessus.

3) On considère les fonctions G et H définies sur] 0 ; + ∞ [par :G (x) = $(1 - \ln x)x^2$ et H(x) = $x^2(\ln x - \frac{1}{2})$.

L’une d’entre elles est la primitive de f sur]0 ; +∞[. laquelle ? Justifier la réponse.

EXERCICE 3

Dans l’espace ξ rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ on donne les points A $(2,1,1)$ et I $(3,-1,0)$. $P_1 = \{M \in \xi \text{ tels que } MA^2 - \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MI} = 0\}$

1) a) Vérifie que $A \in P_1$

b) Montrer que P_1 est un plan d’ont une équation cartésienne est : $x-2y-z+1=0$.

2) Soit S la sphère de centre I et passant par A.

3) Vérifier que le rayon de la sphère S est $R=\sqrt{6}$ puis déterminer une équation cartésienne de S.

4) Soit P le plan dont une équation cartésienne est : $2x-y+z-4=0$.

a) Montrer que le plan P coupe la sphère S suivant un cercle C dont on précisera les coordonnées de son centre H et son rayon r.

b) Soit le point $B(2,-2,-2)$. Vérifier que $[AB]$ est un diamètre de C.

c) Déterminer une équation cartésienne du plan P_2 tangent à S en B.

EXERCICE 4

Soit φ la fonction définie sur IR par : $\varphi(x)=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$

1) Montrer que φ est dérivable sur IR et calculer φ'(x), en déduire les variations de φ.

2) Montrer que φ est une fonction impaire.

3) Soit g la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par g(x)= φ(tan x).

a) Montrer que g est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer g'(x).

b) En déduire que g(x)=x pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

4) Calculer $I=\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ et $J=\int_0^1 \frac{t^2dt}{1+t^2}$