❖❖EXERCICE 01❖❖

1- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$e^{x}+2e^{-x}-3=0$; $e^{x+1}-3=0$; $e^{2x}+6e^{x}+5=0$

2- Calculer $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{x}$; $\lim\limits_{x\to0^{+}}xe^{\frac{1}{x}}$; $\lim\limits_{x\to0^{-}}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}x^{2}e^{x}$; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{x}-e}{e(x-1)}$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{x}$; $\lim\limits_{x\to0^{+}}xe^{\frac{1}{x}}$; $\lim\limits_{x\to0^{-}}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}x^{2}e^{x}$; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{x}-e}{e(x-1)}$

3- a) Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}^{*}$, on a : $\dfrac{e^{2x}+1}{e^{x}-1}=e^{x}-1+\dfrac{2\,e^{x}}{e^{x}-1}$

b) En déduire $\displaystyle\int_{\ln(2)}^{\ln(3)}\frac{e^{2x}+1}{e^{x}-1}\,dx$

❖❖EXERCICE 02❖❖

Soit F la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $F(x)=\displaystyle\int_{0}^{x}\sqrt{t}\,e^{-t}\,dt$

Cocher la réponse juste (sans calculer $F(x)$):

* F est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ ☐
* Pour tout $x\in[0,+\infty[$, on a : $F(x)\le\displaystyle\int_{0}^{x}te^{-t}\,dt$ ☐
* Pour tout $x\in[0,+\infty[$, on a : $F'(x)=\sqrt{x}\,e^{-x}-e^{-1}$ ☐
* 0 est l'unique solution de l'équation $F(x)=0$ ☐

❖❖EXERCICE 03❖❖

Dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère la courbe ($\mathscr{C}_f$) ci-dessous d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1- Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$; $f'(1)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x+4)}{x+4}$

2- Dresser le tableau de variation de f

3- a) Calculer $A_n=\displaystyle\int_{1}^{n}-xe^{1-x}\,dx$; $n\in\mathbb{N}^{*}$

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n$

4- Soit $g(x) = -f(x)$; $x \in \mathbb{R}$

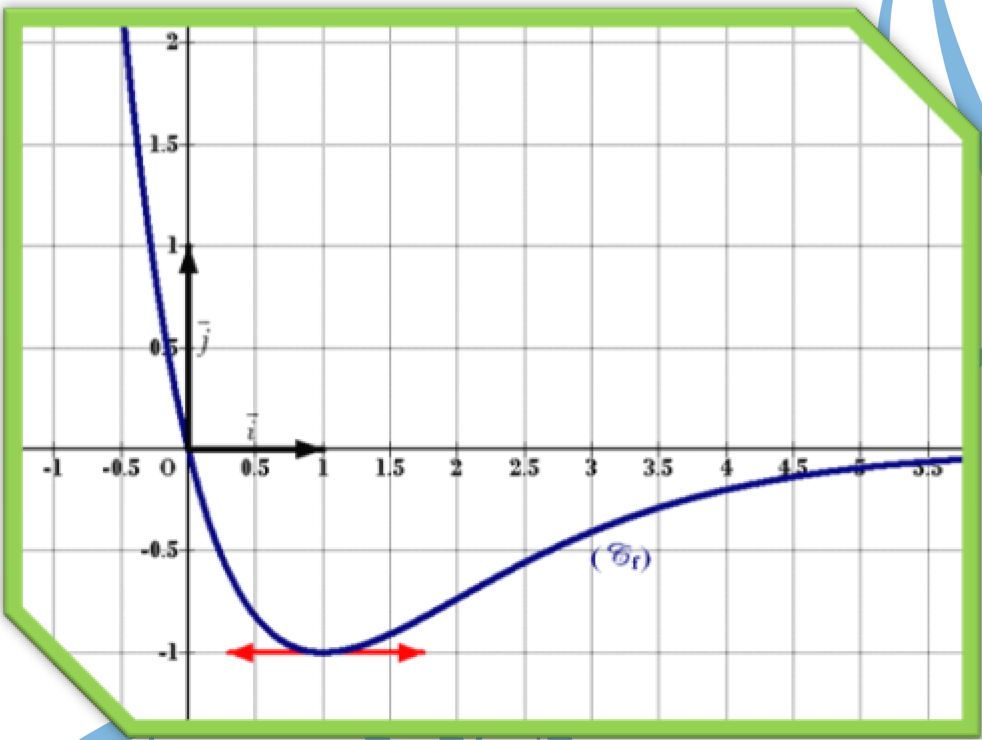
Tracer $(\mathscr{C}_g)$

5- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} k\, e^{1-k}$

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on a : $g(k) \leq \int_{k-1}^{k} g(t)dt$

b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 3.

c) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.



❖❖EXERCICE 04❖❖

Soit $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^{x})$

1- Déterminer D_f

2- Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

3- a) Montrer que f est dérivable sur D_f et que pour tout $x \in D_f$, on a :

$$f'(x) + f(x) = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

b) En déduire $\int_{0}^{\ln(2)} f(x)\,dx$

❖❖EXERCICE 05❖❖

Soit $g(x)=e^{\frac{1}{x}}$

1- Déterminer D_g

2- a) Montrer que pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$, il existe $c\in[x,x+1]$ tel que :

$$g(x)-g(x+1)=\frac{1}{c^2}e^{\frac{1}{c}}$$

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)$

❖❖EXERCICE 06❖❖

Soit $f(x)=\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

1- Déterminer D_f

2- Dresser le tableau de variation de f

3- Montrer que f réalise une bijection de D_f sur un intervalle I que l'on précisera.

4- Tracer $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$ dans un même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

❖❖EXERCICE 07❖❖

Soient $f(x)=\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}$ et $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1- Déterminer D_f

2- Montrer que le point $I(0,1)$ est un centre de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.

3- Dresser le tableau de variation de f.

4- Tracer $(\mathscr{C}_f)$.

5- Montrer que f réalise une bijection de D_f sur un intervalle J que l'on précisera.

6- Déterminer $f^{-1}(x)$ et tracer $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$.

❖❖EXERCICE 08❖❖

Soit $f(x)=xe^{-\sqrt{x}}$; $x\in\mathbb{R}_+$

1- Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, on a : $f(x)=4\left(\dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{x}}{e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}}}\right)^2$

2- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3-a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0

b) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $\forall x \in]0,+\infty[$, on a: $f'(x)=\frac{1}{2}\left(2-\sqrt{x}\right)e^{-\sqrt{x}}$

c) Dresser le tableau de variation de f .

4- Tracer $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthogonal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

❖❖EXERCICE 09❖❖

Soient $f(x)=\ln\left|e^{x}-\sqrt{e^{x}}\right|$; $x\in\mathbb{R}^{*}$ et $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

2- a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{*}$ et que $\forall x\in\mathbb{R}^{*}$, on a: $f'(x)=\dfrac{2\sqrt{e^{x}}-1}{2\left(\sqrt{e^{x}}-1\right)}$

b) Dresser le tableau de variation de f

3- a) Montrer que pour tout $x\in]-\infty,0[$, on a : $f(x)=\dfrac{x}{2}+\ln\left|1-e^{\sqrt{x}}\right|$ et en déduire la branche infinie au voisinage de $-\infty$.

b) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, on a : $f(x)=x+\ln\left|1-e^{\sqrt{-x}}\right|$ et en déduire la branche infinie au voisinage de $+\infty$.

4- a) Soit g la restriction de f à $]0,+\infty[$. Montrer que g réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera.

b) Expliciter $g^{-1}(x)$

5- Tracer $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_{g^{-1}})$ dans un même repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

❖❖EXERCICE 10❖❖

Soit $f(x)=\displaystyle\int_{0}^{\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}}\frac{dt}{\sqrt{t^{2}+1}}$

1- Montrer que $D_f=\mathbb{R}$

2- a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$

b) En déduire $f(x)$

3- Calculer $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{dt}{\sqrt{t^{2}+1}}$

❖❖EXERCICE 11❖❖

Soit $F(x)=\int_0^x e^{-t}\sin(t)\,dt \quad ; \quad x\in\mathbb{R}$

1- Montrer que $F(x)=\frac{1}{2}\left[1-\left[\cos(x)+\sin(x)\right]e^{-x}\right]$

2- On pose $I_k=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-t}\sin(t)\,dt \quad ; \quad k\in\mathbb{N}$ et $S_n=I_0+I_1+\cdots+I_n$

a) Exprimer S_n à l'aide de F.

b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

3- a) Donner suivant la parité de k le signe de I_k (sans calculer I_k)

b) Calculer I_0 puis I_k.

c) Vérifier que $I_k=(-1)^k e^{-k\pi} I_0$

d) Calculer $T_n=\left|I_0\right|+\left|I_1\right|+\left|I_2\right|+\cdots+\left|I_n\right|$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$

❖❖EXERCICE 12❖❖

Soit $f(x)=e^{3x}-e^{x} \quad ; \quad x\in\mathbb{R}$

1- Dresser le tableau de variation de f

2- a) Montrer que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution $\alpha\in[0,1]$

b) Prouver que $\ln\left(1+e^{-\alpha}\right)=2\alpha$

3- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x)=\frac{1}{2}\ln\left(1+e^{-x}\right)$

a) Montrer que $g(x)\geq 0 \;;\; \forall x\in\mathbb{R}_+$

b) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}_+$, on a : $\left|g'(x)\right|<\frac{1}{4}$

4- On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=g(u_n) \quad ; \quad \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $\left|u_{n+1}-\alpha\right|\leq\frac{1}{4}\left|u_n-\alpha\right|$

b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $\left|u_n-\alpha\right|\leq\left(\frac{1}{4}\right)^n$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

❖❖EXERCICE 13❖❖

Soit $I_n=\int_0^n x^n e^{-x}\,dx \quad ; \quad n\in\mathbb{N}^*$

1- Calculer I_1 et I_2

2- Montrer que $I_n=e^{-n}\,n^n\int_0^n e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$

3- a) Montrer que pour tout $x\in[0,1[$, on a : $\ln(1-x)\leq -x-\frac{x^2}{2}$

b) En déduire que pour tout $t\in[0,n]$, on a : $e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-\frac{t^2}{2n}}$

4- a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $\frac{e^n}{n^n}I_n \leq \sqrt{2n}\int_0^{\sqrt{\frac{n}{2}}} e^{-u^2}\,du$

b) Montrer que pour tout $u\in[1,+\infty[$, on a : $e^{-u^2}\leq e^{-u}$

c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, on a : $\frac{e^n}{n^{n+1}}I_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}\int_0^1 e^{-u^2}\,du+\sqrt{\frac{2}{n}}\left(e^{-1}-e^{-\sqrt{\frac{n}{2}}}\right)$

d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e^n}{n^{n+1}}I_n$

❖❖EXERCICE 14❖❖

-A-

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x)=\begin{cases}-\ln(x+1) & \text{si } x\geq 0\\ e^{-x}-1 & \text{si } x<0\end{cases}$

1- Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$, on a : $(\varphi\circ\varphi)(x)=x$

2- Etudier la continuité et la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}$.

3- Etudier les variations de φ et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4- Montrer que l'équation $\varphi(x)=x$ admet une unique solution.

-B-

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\begin{cases}1+2\int_0^x e^{t-\ln(1+t)}\,dt & \text{si } x\geq 0\\ 1+2\int_0^x e^{t+e^{-t}-1}\,dt & \text{si } x\leq 0\end{cases}$

1- Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2- a) Montrer que $\forall\, t\in\mathbb{R}_+$, on a : $e^{t-\ln(1+t)}\geq\frac{1}{t+1}$

b) En déduire que $\forall\, x\in\mathbb{R}_+$, on a : $g(x)\geq 1+2\ln(1+x)$

c) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$

3- a) Montrer que $\forall\, t\in\mathbb{R}$, on a : $e^{-t}+t-1\geq 0$

b) En déduire que $\forall\, x\in\mathbb{R}_-$, on a : $g(x)\leq 1+2x$

c) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$

4- Dresser le tableau de variation de g.

-C-

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=a\int_0^x e^{t+\varphi(t)}\,dt+b \quad ; \quad (a,b)\in\mathbb{R}^2$

1- Montrer que f est deux fois sur $\mathbb{R}$ et que : $f''(x)-[1+\varphi'(x)]f'(x)=0$

2- Soient pour tout $x\in\mathbb{R}$; $u(x)=e^{x+\varphi(x)}$ et $v(x)=\int_0^{\varphi(x)} e^{t+\varphi(t)}\,dt+\int_0^x e^{t+\varphi(t)}\,dt$

a) Montrer que u et v sont les primitives d'une même fonction.

b) En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a: $\int_0^{\varphi(x)} e^{t+\varphi(t)}\,dt+\int_0^x e^{t+\varphi(t)}\,dt=e^{x+\varphi(x)}-1$

❖❖EXERCICE 15❖❖

-A-

Soit $g(x)=1+(x-1)e^x \quad ; \quad x\in\mathbb{R}$

1- Montrer que $g(x)\geq 0 \quad ; \quad \forall x\in\mathbb{R}$

2- Prouver que 0 est l'unique solution de l'équation $g(x)=0$

-B-

Soient f la fonction définie par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{e^x-1} & \text{si } x\neq 0 \\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases}$ et ($\mathscr{C}_f$) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1- Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x]$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

2- a) Montrer que f est continue en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0.

c) Dresser le tableau de variation de f.

3- Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $J(x)=\int_0^x t\,e^{-t}\,dt$

a) Montrer que $J(x)=e^{-x}\left(e^x-x-1\right)$

b) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $\dfrac{x^2}{2}e^{-\frac{x+|x|}{2}}\leq J(x)\leq\dfrac{x^2}{2}e^{-\frac{x-|x|}{2}}$

c) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, on a : $\dfrac{1}{2}e^{\frac{x-|x|}{2}}\leq\dfrac{e^x-x-1}{x^2}\leq\dfrac{1}{2}e^{\frac{x+|x|}{2}}$

d) En déduire que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$

5- a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, on a : $f''(x)=\dfrac{e^x}{\left(e^x-1\right)^3}\left[(x-2)e^x+x+2\right]$

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $f''(x) > 0$

c) Tracer ($\mathscr{C}_f$)

-C-

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1- Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution que l'on précisera.

2- a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|u_{n+1} - \ln(2)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln(2)|$

c) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

-D-

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t}{e^t - 1}\, dt \quad \text{si } x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$

1- a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $\frac{2x^2}{e^{2x} - 1} \leq F(x) \leq \frac{x^2}{e^x - 1}$

b) Montrer que F est continue en 0.

c) Montrer que F est dérivable en 0 et que $F'(0) = 1$

2-a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$F'(x) = \frac{3 - e^x}{1 + e^x} f(x)$$

b) Dresser le tableau de variation de F.