EXERCICE 01

Soit $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+2x}{x^2-1}}$

1- Déterminer le domaine de définition de f et les limites de f aux bornes de D_f .

2- Etudier les variations de f .

3- Tracer $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

EXERCICE 02

Soit $g(x)=\sqrt{x^2+3x-4}$

1- Déterminer le domaine de définition de f et les limites de f aux bornes de D_g .

2- Calculer $g(-3-x)-g(x)$. Conclure

3- Dresser le tableau de variation de g

4- a) Montrer que pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$, on a : $g(x)=x\sqrt{1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{x^2}}$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}$

c) Montrer que pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$, on a : $g(x)-x=\dfrac{3-\dfrac{4}{x}}{1+\sqrt{1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{x^2}}}$

d) Montrer que la droite (Δ) : $y=x+\dfrac{3}{2}$ est une asymptote oblique à $(\mathscr{C}_g)$

e) Montrer que $(\mathscr{C}_g)$ admet une autre asymptote oblique (Δ')

3- Tracer $(\mathscr{C}_g)$ dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

EXERCICE 03

Soit $h(x)=\cos(\pi x)$; $x\in[0,1]$

1- Montrer que h réalise une bijection de $[0,1]$ sur un intervalle I que l'on précisera.

2- Tracer dans un même repère $(\mathscr{C}_h)$ et $(\mathscr{C}_{h^{-1}})$

3- Montrer que pour tout I on a : $h^{-1}(x)+h^{-1}(-x)=1$. Conclure.

EXERCICE 04

Soit $\varphi(x)=\sqrt[4]{x^2-1}$

1- Déterminer D_φ

2- Etudier la parité de φ

3- a) Montrer que pour tout $x \geq 1$, on a : $\varphi(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{1 - \frac{1}{x^2}}$

b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\varphi(x)}{x}$

4- a) Etudier la dérivabilité de φ à droite en 1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Montrer que φ est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer $\varphi'(x)$

c) Etudier les variations de φ.

5- a) Soit $(\Delta) : y = x$. Etudier la position relative de $(\mathscr{C}_\varphi)$ et (Δ)

b) Tracer $(\mathscr{C}_\varphi)$

6- a) Montrer que φ réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera.

b) Montrer que φ^{-1} est dérivable sur I.

c) Tracer $(\mathscr{C}_{\varphi^{-1}})$

❖❖EXERCICE 05❖❖

-I-

Soit $f(x) = \begin{cases} x^2 - x\sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1- Déterminer $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$

2- Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0

3- Dresser le tableau de variation de f

4- Tracer $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

-II-

Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty, 0[$

1- Montrer que g réalise une bijection de $]-\infty, 0[$ sur un intervalle I que l'on précisera.

2- Etudier la continuité et la dérivabilité de g sur I

3- Calculer $g\left(-\frac{4}{3}\right)$ et en déduire $(g^{-1})'\left(-\frac{1}{2}\right)$

4- Tracer $(\mathscr{C}_{g^{-1}})$ dans le même repère de $(\mathscr{C}_f)$.

❖❖EXERCICE 06❖❖

Soit $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$, $x \in [1, +\infty[$

1- Montrer que f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer $f'(x)$

2- Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3- Dresser le tableau de variation de f.

4- Montrer que f réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera.

5- Montrer que pour tout $x \in I$, on a : $f^{-1}(x)=\dfrac{1+x^2}{2x}$

6- a) On désigne par ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}$') les courbes représentatives respectives de f et f^{-1} dans un même repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

b) Montrer que la droite $(\Delta): y=2x$ est une asymptote oblique à (C)

c) Tracer ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}$')

7- Soit g la fonction définie sur $g(x)=f\left(\dfrac{1}{\cos(x)}\right)$

a) Montrer que pour tout $x \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ on a : $g(x)=\dfrac{1+\sin(x)}{\cos(x)}$

b) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle I que l'on précisera.

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on a : $\left(g^{-1}\right)'(x)=\dfrac{2}{x^2+1}$

❖❖EXERCICE 07❖❖

-I-

$f(x)=\sqrt[3]{\tan^2(x)}$; $x \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

1- a) Montrer que f est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et dérivable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

b) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et montrer que f n'est pas dérivable à droite en 0

2- a) Montrer que f réalise une bijection de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle I que l'on précisera.

b) Tracer les courbes représentatives de f et de f^{-1} dans un même repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. On calculera $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ et $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

c) Sans calculer $f^{-1}(2)$, prouver que $f^{-1}(2)>\dfrac{\pi}{3}$. En déduire que $f^{-1}(2)>1$

3- a) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $\left(f^{-1}\right)'(x)$

b) Montrer que f^{-1} est dérivable à droite en 0

-II-

Soit $H(x)=\begin{cases}\dfrac{f^{-1}(x)-\dfrac{\pi}{4}}{x-1}\\ a \text{ si } x=1\end{cases}$

1- Déterminer D_H

2- Déterminer a pour que H soit continue sur D_H

-III-

On pose $\varphi(x)=f^{-1}(x^2)+f^{-1}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

1- a) Montrer que φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $\varphi'(x)$.

b) En déduire que $\forall x\in]0,+\infty[$, on a : $\varphi(x)=\frac{\pi}{2}$

c) En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, on a : $f^{-1}(n)+f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{\pi}{2}$

2- Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in\{0,1,2,\dots,n\}$, on a : $f^{-1}(n)\leq f^{-1}(n+k)\leq f^{-1}(2n)$

3- Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $U_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}f^{-1}\left(\frac{1}{n+k}\right)$

Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, on a : $f^{-1}\left(\frac{1}{2n}\right)\leq U_n\leq f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$.En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

-IV-

On pose $h(x)=f^{-1}(x+1)$

1- Etudier et représenter graphiquement h

2- Montrer que $\forall x\in[-1,+\infty[$, on a : $0\leq h(x)\leq\frac{5}{3}$

3- Montrer que l'équation $h(x)=x$ admet une unique solution $\alpha\in[-1,+\infty[$ (on admet que $\forall x\in]-1,+\infty[$, on a : $h'(x)<1$). Prouver que $\alpha\in\left[1,\frac{5}{3}\right]$

4- On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} v_0=\frac{4}{3} \\ v_{n+1}=h(v_n)\,;n\in\mathbb{N}\end{cases}$

a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, on a : $1\leq v_n\leq\frac{5}{3}$

b) Montrer que $\forall x\in\left]1,\frac{5}{3}\right[$, on a : $|h'(x)|\leq\frac{4}{5}$

c) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, on a : $|v_{n+1}-\alpha|\leq\frac{4}{5}|v_n-\alpha|$

d) En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}$, on a : $|v_n-\alpha|\leq\left(\frac{4}{5}\right)^n|v_0-\alpha|$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$.