Enseignant : Abdessattar El-Faleh ** Année Scolaire 2010-2011

I / L'ensemble des nombres complexes :

Définition : On appelle ensemble des nombres complexes , et on note $\mathbb{C}$, l'ensemble des nombres $Z = a + ib$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et i un nombre vérifiant $i^2 = -1$.

- a est appelé partie réelle de Z, notée $\text{Re}(Z)$.
- b est appelé partie imaginaire de Z, noté $\text{Im}(Z)$.
- Pour tout $Z \in \mathbb{C}$: Z est réel $\Leftrightarrow \text{Im}(Z) = 0$; Z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \text{Re}(Z) = 0$.

Opération : les propriétés des opération dans $\mathbb{C}$ sont les même que celle dans $\mathbb{R}$ avec $i^2 = -1$.

Théorème : tout nombre complexe non nul $Z = a + ib$; $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ admet un inverse Z' (c'est-à-dire un nombre complexe Z' vérifiant : $ZZ' = 1$) on a : $Z' = \dfrac{a}{a^2+b^2} + i\left(-\dfrac{b}{a^2+b^2}\right)$

Z' est noté $\dfrac{1}{Z}$.

Remarque : En pratique , pour le calcul de l'inverse et du quotient , on ne tient pas la formule , mais on fait intervenir « à propos » l'égalité : $(a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$.

II / Conjugué d'un nombre complexe :

Définition : soit $Z = a + ib$; $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ un nombre complexe , on appelle conjugué de Z le nombre complexe : $\overline{Z} = a - ib = \text{Re}(Z) - i\,\text{Im}(Z)$.

Remarque : • pour tout $Z \in \mathbb{C}$: Z est réel $\Leftrightarrow Z = \overline{Z}$.

• pour tout $Z \in \mathbb{C}$: Z est imaginaire pur $\Leftrightarrow Z = -\overline{Z}$.

Théorème : Pour tous nombres complexes Z et Z' , et tout entier naturel n on a :

$$\overline{Z+Z'} = \overline{Z} + \overline{Z'} \;;\; \overline{-Z} = -\overline{Z} \;;\; \overline{Z.Z'} = \overline{Z}.\overline{Z'} \;;\; \overline{Z^n} = \overline{Z}^n$$

$$\overline{\left(\frac{1}{Z'}\right)} = \frac{1}{\overline{Z'}} \;;\; \overline{\left(\frac{Z}{Z'}\right)} = \frac{\overline{Z}}{\overline{Z'}} \;;\; (Z' \in \mathbb{C}^*).$$

III / Module d'un nombre complexe :

Définition : Soit $Z = a + ib$; $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ un nombre complexe ; on appelle module de Z le réel positif : $|Z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{[\text{Ré}(Z)]^2 + [\text{Im}(Z)]^2} = \sqrt{Z.\overline{Z}}$.

Propriétés des modules :

Théorème : Pour tous nombres complexes Z et Z' on a :

- $|Z| = 0 \Leftrightarrow Z = 0$
- $|Z + Z'| \le |Z| + |Z'|$ (Inégalité triangulaire) .
- $|Z.Z'| = |Z|.|Z'|$ et $\left|\dfrac{Z}{Z'}\right| = \dfrac{|Z|}{|Z'|}$; $(Z' \in \mathbb{C}^*)$.

- $|Z^n| = |Z|^n \; ; (n \in \mathbb{N}^*)$.
- $|\lambda . Z| = |\lambda| . |Z| \; ; \; (\lambda \in \mathbb{R})$.

IV / Argument d'un nombre complexe non nul :

Définition : Soit $Z \in \mathbb{C}^*$ et M l'image de Z dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$; on appelle argument de Z et on note $Arg(Z)$ toute mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.

Remarques : * Si θ est un argument de Z, tout autre argument de Z est de la forme : $\theta + 2k\pi \; ; k \in \mathbb{Z}$, ce que l'on traduit par l'écriture $Arg(Z) \equiv \theta [2\pi]$.

* $\begin{cases} Z = Z' \\ (Z, Z') \in \mathbb{C}^{*2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |Z| = |Z'| \\ Arg(Z) \equiv Arg(Z') [2\pi] \end{cases}$ car l'égalité des modules définit l'appartenance à un même cercle de centre O et celle des arguments l'appartenance à un même demi-droite d'origine O.

Argument d'une différence :

Théorème : Soit Z_A et Z_B deux nombres complexes distincts , d'image respectives A et B alors : $Arg(Z_B - Z_A) \equiv \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}}\right) [2\pi]$.

Forme trigonométrique :

Théorème : Soit $Z \in \mathbb{C}^*$

* Si $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r > 0$ alors $r = |Z|$ et $Arg(Z) \equiv \theta [2\pi]$.
* Si $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r < 0$ alors $r = |Z|$ et $Arg(Z) \equiv \theta + \pi [2\pi]$.

Arguments et opérations :

Théorème : Pour tous nombres non nuls Z et Z' on a :

$$Arg(Z.Z') \equiv Arg(Z) + Arg(Z') [2\pi].$$

Corollaire : Pour tous nombres non nuls Z et Z' on a :

$$Arg\left(\frac{Z}{Z'}\right) \equiv Arg(Z) - Arg(Z') [2\pi] \quad ; \quad Arg(Z^n) \equiv n\, Arg(Z) [2\pi] \; ; n \in \mathbb{N}.$$

V / Notation exponentielle :

La notation $e^{i\theta}$:

Définition : Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Propriétés : Pour tous $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$e^{i\theta} . e^{i\theta'} = e^{i(\theta + \theta')} \quad ; \quad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta - \theta')} \quad ; \quad \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \; ; n \in \mathbb{N}.$$

Formules de Moivre et d'Euler :

Théorème : * <u>Formule de Moivre</u> : Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$[\cos(\theta) + i\,\sin(\theta)]^n = \cos(n\theta) + i\,\sin(n\theta) \quad \text{et}$$

$$[\cos(\theta) - i\,\sin(\theta)]^n = \cos(n\theta) - i\,\sin(n\theta) \; .$$

*** Formule d'Euler :** Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a : $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

VI / Racines n^ièmes d'un nombre complexe :

* Soientt $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $u \in \mathbb{C}$, on appelle racine n^ième de u toute solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $Z^n = u$.

- Si $u = 0$ alors l'équation $Z^n = u$ admet l'unique solution 0 .
- Si $u = re^{i\theta}\,;\, r > 0$ alors l'équation $Z^n = u$ admet n solutions c'est-à-dire u admet exactement n racines n^ièmes de la forme : $Z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}$ avec $k \in \{0\,;1\,;2\,;\cdots;(n-1)\}$.

* Dans le plan complexe les images des racines carrées d'un nombre complexe non nul sont symétriques par rapport à O (origine du repère) .

* Pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\,;2\}$ les images dans le plan complexes de n racines n^ièmes de $u = r\,e^{i\theta}$ $r > 0$ sont les sommets d'un polygone régulier de n cotés inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$.

VII / Equations du second degré dans $\mathbb{C}$:

Soit l'équation $a\,z^2 + b\,z + c = 0$ ou $a \in \mathbb{C}^*$ et $(b\,;c) \in \mathbb{C}^2$; les solutions de cette équation dans $\mathbb{C}$ sont :

$z' = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $z'' = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ avec δ est une racine carrée du nombre complexe $\Delta = b^2 - 4ac$.

VIII / Linéarisation :

Il s'agit de transformer un produit de type : $\cos^n(x)$, $\sin^n(x)$ ou $\cos^n(x).\sin^n(x)$en une somme de termes de type : $a\cos(\alpha\, x)$ou $b\sin(\beta\, x)$.

IX / Nombres complexes et géométrie :

Dans cette partie le plan complexe $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormée direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.

*** Colinéarité et orthogonalité :**

Théorème : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan $\mathscr{P}$, d'affixes respectives Z et Z' , on a :

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \dfrac{Z}{Z'} \in \mathbb{R}$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \dfrac{Z}{Z'} \in i\mathbb{R}$.

*** Cocyclicité :**

Théorème : Soit $a\,;b\,;c$ et d quatre nombres complexes distincts d'images respectives $A\,;B\,;C$ et D on a :

Les points $A\,;B\,;C$ et D sont cocycliques ou alignés $\Leftrightarrow \left(\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d}\right) \in \mathbb{R}$.

Point méthode :

*** Somme et différence de deux termes :** Pour transformer une telle expression , on peut essayer de faire apparaître un cosinus ou un sinus $\left(e^{ix}+e^{-ix} \quad ou \quad e^{ix}-e^{-ix}\right)$ pour une factorisation appropriée.

Exemples : • $e^{ix}+1 = e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{i\frac{x}{2}}+e^{-i\frac{x}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right).e^{i\frac{x}{2}}$

• $e^{ix}-e^{i5x} = e^{i\left(\frac{1+5}{2}\right)x}\left(e^{i(-2x)}-e^{i2x}\right) = \left[-2\sin(2x)\right].e^{i3x}$.

*** Module et argument :** Une expression du type $r\,e^{i\theta}$ ne doit pas nous abuser ; il est indispensable de connaître le signe de r pour conclure :

$$Z = r\,e^{i\theta} \begin{cases} \text{Si } r>0 : \ |Z| = r \ \text{ et } \ Arg(Z) \equiv \theta[2\pi] \\ \text{Si } r<0 : \ |Z| = -r \ \text{ et } \ Arg(Z) \equiv \theta+\pi[2\pi] \end{cases}$$

*** Expression de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$:**

Le calcul débute par : $\cos(nx) = \mathrm{Re}\left(e^{inx}\right) = \mathrm{Re}\left(\left(e^{ix}\right)^n\right) = \mathrm{Re}\left((\cos x + i\sin x)^n\right) = \cdots\cdots$

Le scénario se poursuit par le développement de $\left[(\cos(x)+i\sin(x))\right]^n$; la partie imaginaire du résultat est $\sin(nx)$

*** Transformation de $a\cos(x)+b\sin(x)\,;(a,b)\in\mathbb{R}^2$:**

- La méthode consiste à écrire $a\cos(x)+b\sin(x) = \mathrm{Re}\left[\left[\cos(x)+i\sin(x)\right](a-ib)\right]$ puis à utiliser les formes exponentielles pour aboutir à : $a\cos(x)+b\sin(x) = r\cos(x-\theta)$ avec $a+ib = re^{i\theta}$.
- Une autre méthode (sûrement moins savante) consiste à factoriser par $\sqrt{a^2+b^2}$.

$$a\cos(x)+b\sin(x) = \sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(x)+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(x)\right]$$ et à

reconnaître un réel θ tel que : $\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Une formule d'addition donne alors : $a\cos(x)+b\sin(x) = \sqrt{a^2+b^2}\,\cos(x-\theta)$.

❖❖EXERCICE 01❖❖

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$

Cocher la réponse juste

❖ Soit z = 2 + i (3 – 7 i)

A ☐ La partie réelle de z est 2
B ☐ z a pour image le point M(9 ;3)
C ☐ La partie imaginaire de z est 3
D ☐ Le conjugué de z est $\bar{z} = 2 - i\,(3 - 7\,i)$
E ☐ Le module de z est $|z| = \sqrt{10}$

❖ Soit $z = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{i}$

A ☐ La forme algébrique de z est : $z = \sqrt{3} - i$
B ☐ $|z| = 2$
C ☐ $\arg(z) = \dfrac{5\pi}{6}[2\pi]$
D ☐ Le point M image de z est l'un des points d' intersection du cercle de centre O, de rayon 2, et de la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.
E ☐ $z^6 = -64$

❖ Soit $z = -3\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$

A ☐ $\arg(z) = \dfrac{\pi}{6}[2\pi]$
B ☐ $|z| = 3$
C ☐ Une forme trigonométrique de $(-z)$ est $-z = 3\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$
D ☐ $z = 3\left[\cos\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)\right]$
E ☐ $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{3}\left[\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right]$

❖ Une solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $2z + \bar{z} = 9 + i$ est :

A ☐ 3
B ☐ i
C ☐ $3 + i$

❖ Soit $z \in \mathbb{C}$; $|z+i|$ est égal à :

A ☐ $|z|+1$

B ☐ $|z-1|$

C ☐ $|i\bar{z}+1|$

❖ Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ . Un argument de $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{\bar{z}}$ est :

A ☐ $\theta-\dfrac{\pi}{3}$

B ☐ $\theta+\dfrac{2\pi}{3}$

C ☐ $\dfrac{2\pi}{3}-\theta$

❖ Soit $z=\left(\sqrt{3}+i\right)^n$; $n \in \mathbb{Z}$. z est imaginaire pur si et seulement si :

A ☐ $n=3$

B ☐ $n=6k+3\,;k\in\mathbb{Z}$

C ☐ $n=6k\,;k\in\mathbb{Z}$

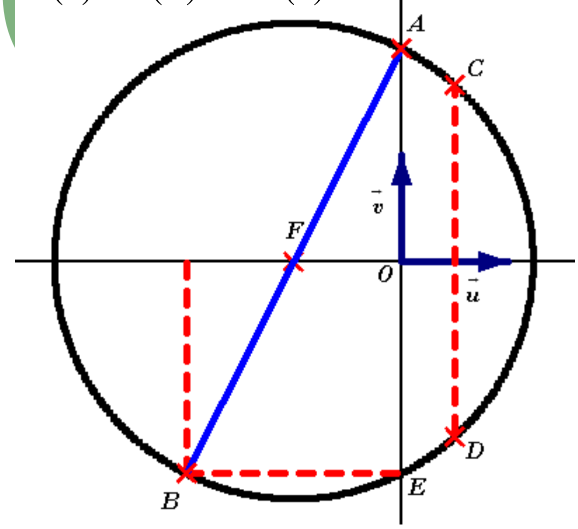
❖ Soit $\Omega(1-i)$ .L'ensemble des points M d'affixe $z=x+iy$: $|z-1+i|=|3-4i|$ a pour équation :

A ☐ $y=-x+1$

B ☐ $(x-1)^2+y^2=\sqrt{5}$

C ☐ $z=1-i+5\,e^{i\theta}$; $\theta\in\mathbb{R}$

❖ Les points $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ et $E(e)$ sont sur le cercle de diamètre $[AB]$, alors on a :



A ☐ $a+b=0$

B ☐ $\dfrac{b-c}{a-c} \in i\mathbb{R}$.

C ☐ $\arg\left(\dfrac{b-a}{e-a}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{e-c}{b-c}\right)[2\pi]$

D ☐ $c-e=\overline{d}-\overline{a}$

E ☐ $a+c+d+e=1$

❖❖EXERCICE 02❖❖

Soient $z=\sqrt{3}-i$ et $z'=1+i$

1- Ecrire z et z' sous forme exponentielle.

2- En déduire la forme algébrique de $\dfrac{(1+i)^{14}}{\left(\sqrt{3}-i\right)^{8}}$

❖❖EXERCICE 03❖❖

1- Mettre sous la forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$z_3=-3i\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$; $z_2=(1-i)\,e^{i\frac{8\pi}{7}}$; $z_3=\dfrac{\left(1-i\sqrt{3}\right)e^{-i\frac{\pi}{8}}}{(1-i)\,e^{i\frac{13\pi}{11}}}$; $z_4=1+ie^{i\theta}\,;\theta\in\left]-\pi,\pi\right[$

2- Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $z\,(z\in\mathbb{C})$ dans chacun des cas suivants :

a) $\dfrac{1+z}{1-z} \in \mathbb{R}$

b) $\dfrac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}$

c) $\left|\dfrac{1+z}{1-z}\right| = 1$

d) M soit aligné avec les points d'affixes i et iz.

❖❖EXERCICE 04❖❖

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

Soit $z'=\dfrac{z-2i}{iz-4}$

1- Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points $M(z)$ tels que z' soit réel .

2- Déterminer et construire l'ensemble E_2 des points $M(z)$ tel que $\arg(z')\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

3- Déterminer et construire l'ensemble E_3 des points $M(z)$ tels que $|z'|=2$

❖❖EXERCICE 05❖❖

Soit l'équation $(E): z^3-(2+i)z^2+(2+4i)z-4i=0$

1- Montrer que $2i$ est une solution de l'équation (E).

2- Déterminer deux réels b et c tels que pour tout $z\in\mathbb{C}$, on a :

$z^3-(2+2i)z^2+(2+4i)z-4i=(z-2i)(z^2+bz+c)$.

3- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). On écrira les solutions trouvées d'abord sous forme algébrique , puis sous forme géométrique .

4- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ .Soit les points A , B , C et I d'affixes respectives : $z_A=2i$; $z_B=1+i$; $z_C=1-i$ et $z_I=\dfrac{9-13i}{7}$.

a) Montrer que $\dfrac{z_I-z_A}{z_C-z_A}$ est un réel que l'on calculera .

b) Que peut-on en déduire quant au point I ? Justifier votre réponse .

c) Calculer l'affixe du point J barycentre des points pondérés $(A;1)$ et $(B;-4)$.

5- Soit G le point d'intersection de (BI) et (CJ).

a) Montrer que G est le barycentre des points pondérés $(A;2)$; $(B;-8)$ et $(C;-9)$.

b) En déduire les coordonnés du point G.

❖❖EXERCICE 06❖❖

1- Transformer en une somme le produit $\cos(a).\cos(b)$

2- Transformer en produit les sommes $S=\cos(p)+\cos(q)$ et $S'=\sin(p)+\sin(q)$

3- Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$.

4- Exprimer à l'aide d'un cosinus , l'expression $\cos(x)+\sqrt{3}\sin(x)$

5-a) Déterminer le module et un argument de $e^{i\theta}-1$; $\theta\in\,]0,2\pi[$

b) En déduire la factorisation des sommes :

$S=1+\cos(x)+\cos(2x)+\cdots+\cos(nx)$ et $S'=\sin(x)+\sin(2x)+\cdots+\sin(nx)$

$(x\neq 2k\pi, k\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}^*)$

❖❖EXERCICE 07❖❖

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$

(unité graphique 4 cm).

1- résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2z^2+2z+1=0$

2- On pose $a=\dfrac{-1+i}{2}$

a) Calculer a^2 et a^3

b) Placer dans $\mathscr{P}$ les points $A(a)$; $B(a^2)$ et $C(a^3)$

3- Soit $Z=\dfrac{a^2-a^3}{a-a^3}$. Ecrire Z sous forme algébrique puis déterminer le module et un argument de Z

4- En déduire la nature du triangle ABC

❖❖EXERCICE 08❖❖

1- Soit $f(z)=z^4-10z^3+38z^2-90z+261$

a) Soit $b\in\mathbb{R}$. Exprimer en fonction de b, $\text{Ré}\left[f(ib)\right]$ et $\text{Im}\left[f(ib)\right]$

En déduire que l'équation $f(z)=0$ admet deux solutions imaginaires purs.

b) Montrer qu'il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ que l'on déterminera tel que

$f(z)=(z^2+9)(z^2+\alpha z+\beta)$

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=0$

❖❖EXERCICE 09❖❖

1- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2-\dfrac{1}{5}z+\dfrac{1}{10}=0$; on notera z_1 et z_2 les solutions de (E) tel que $\text{Im}(z_1)>0$

2- Soit $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan(\theta)=3$.

Montrer que $z_1=\dfrac{\cos(\theta)+i\sin(\theta)}{10\cos(\theta)}$ et $z_2=\dfrac{\cos(\theta)-i\sin(\theta)}{10\cos(\theta)}$

3- Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a: $z_1^n+z_2^n=\dfrac{2\cos(n\theta)}{\left[(10\cos(\theta))\right]^n}$

❖❖EXERCICE 10❖❖

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$

(unité graphique 4 cm).

Soit $I(1)$ et $\mathscr{C}$ le cercle de centre Ω et de diamètre $[OI]$

<u>1ère Partie</u>

On pose $a_0=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$ et on note A_0 son image.

1- Montrer que $A_0\in$ C.

2- Soient $B(b)$ avec $b=-1+2i$ et $B'(b')$ avec $b'=a_0b$.

a) Calculer b'

b) Montrer que le triangle OBB' est rectangle en B'.

2ème Partie

Soit $A(a)$; $a \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$. A tout point $M(Z); Z \in \mathbb{C}^*$ on associe le point $M'(z')$ avec $z' = az$

1- On se propose de déterminer l'ensemble des points A tel que le triangle OMM' soit rectangle en M'

a) Interpréter géométriquement $\arg\left(\dfrac{a-1}{a}\right)$

b) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{M'O}, \overrightarrow{M'M}}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{a-1}{a}\right)[2\pi]$

c) En déduire que le triangle OMM' est rectangle en M' si et seulement si : $A \in \mathscr{C} \setminus \{O; I\}$

❖❖EXERCICE 11❖❖

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 2 cm).

Soit $A(-2i)$. A tout point $M(z)$, on associe le point $M'(z')$ avec $z' = -2\bar{z} + 2i$.

1- On considère le point $B(b)$ avec $b = 3 - 2i$.
Déterminer la forme algébriques des affixes a' et b' des points A' et B' associés respectivement aux points A et B. Placer ces points sur un dessin.

2- Montrer que si $M \in (\Delta): y = -2$ alors $M' \in (\Delta)$.

3- Montrer que pour tout point $M(z)$, on a : $|z' + 2i| = 2|z + 2i|$. Interpréter géométriquement cette égalité.

4- Pour tout point M distinct de A, on appelle θ un argument de $z + 2i$.

a) Montrer que θ est une mesure de $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AM}}\right)$.

b) Montrer que $(z + 2i)(z' + 2i)$ est un réel strictement négatif.

c) En déduire un argument de $(z' + 2i)$ en fonction de θ.

d) Que peut-on déduire pour les deux demi-droites $[AM)$ et $[AM')$?

5- En utilisant les résultats précédents proposer une construction géométrique du point M' associé au point M.