Thèmes abordés :

Probabilités ; Géométrie dans l'espace ; Suites réelles ; Equations différentielles du premier ordre ; Fonction exponentielle.

Exercice n°1 : ©

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.

1) Dans le plan complexe, on donne les points A et B d'affixes respectives 1 et i.

   L'ensemble des points M d'affixe z telsque $\frac{i-z}{1-z} \in IR^*$ est :

   a) La droite (AB) privée des points A et B.
   b) Le cercle de diamètre [AB] privé des points A et B .
   c) Le segment [AB] privé des points A et B.

2) Si A et B sont deux événements indépendants d'un même univers tels que l'on ait :

   p(A) = 0.1 et p(B) = 0.5 alors p(A ∪ B) =

   a) 0.05 ; b) 0.55 ; c) 0.6

3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. (C) est la courbe représentative de la fonction f définie par f(x) = $\sqrt{1+\ln x}$. On fait tourner autour de l'axe des abscisses l'arc de la courbe constitué par les points de (C) d'abscisses comprises entre 1 et e. Le volume de $\mathcal{V}$ du solide ainsi engendré est :

   a) π ; b) πe ; c) π(e – 1).

Exercice n°2 : ©

La durée de vie (en années) d'un appareil électronique est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ > 0.

1) a) Déterminer λ pour que p(X ≥ 8) = 0.28
   b) Calculer la probabilité pour que l'appareil ait une durée de vie inférieure ou égale à trois mois.
   c) Déterminer T tel que p(X ≤ T) = 4p(X ≥ T).
2) Sachant qu'un appareil a déjà dépassé six ans, quelle est la probabilité pour qu'il fonctionne quatre ans de plus.
3) Une personne achète n appareils électroniques identiques (n ∈ IN*) du modèle précédent.
   On suppose que la durée de vie d'un appareil est indépendante de celle des autres.

a) Exprimer, en fonction de n, la probanilité p_n qu'au moins un appareil fonctionne plus que 8 ans ?

b) Déterminer n pour que $p_n \geq 0.998$.

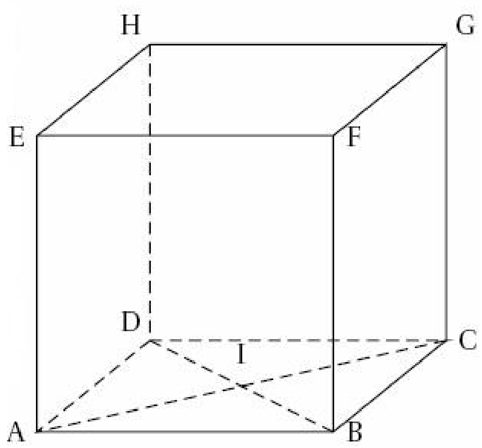
Exercice n°3 : ©

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct.

ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.

Son arête a pour longueur 1.

Le centre de la face ABCD est le point I.



Les questions **1)** et **2)** sont indépendantes.

1) a) Déterminer $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}$.

b) En déduire l'ensemble (*E*) des points M de l'espace tels que : $\left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}\right) \wedge \overrightarrow{BM} = \vec{0}$

c) Déterminer l'ensemble (*F*) des points M de l'espace tels que : $\left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}\right) \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.

2) On appelle P le barycentre du système { (A, 2) ; (C, - 1)}.

a) Montrer que P est le symétrique de C par rapport à A.

b) Soit (*G*) l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|$

Déterminer l'ensemble (*G*).

Montrer que le point A appartient à l'ensemble (*G*).

Exercice n°4 : ©

On considère la suite réelle (u_n) définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n - 1} \text{ pour tout n de IN} \end{cases}$.

1. a) Montrer par récurrence que pour tout n de IN, $1 < u_n < 2$.
   b) Montrer que (u_n) est croissante.
   c) En déduire que (u_n) converge vers une limite que l'on déterminera.
2. Soit (v_n) la suite réelle définie sur IN par : $v_n = \ln(u_n - 1)$.

   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

   b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

   c) Retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice n°5 : ©

A) On donne deux équations différentielles : $(E_1) : y' = 3y$ et $(E_2) : y' = 2y$.

1) Donner les solutions de l'équation (E_1) et celles de l'équation (E_2).
2) Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ où f_1 désigne une solution de l'équation différentielle (E_1) et f_2 désigne une solution de l'équation différentielle (E_2).
   Déterminer f(x) sachant que f(0) = - 2 et f ′ (0) = - 3.

B) On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = e^{3x} - 3e^{2x}$.
   On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Etudier les variations de f et tracer sa courbe $\mathcal{C}$.
2) Soit g la restriction de f à l'intervalle [ln2, + ∞[.
   a) Montrer que g réalise une bijection de [ln2, + ∞[sur un intervalle I que l'on précisera.
   b) Tracer $\mathcal{C}'$ la courbe de g^{-1} dans le même repère.
   c) Calculer l'aire A du domaine limité par la courbe $\mathcal{C}'$ et les droites d'équations y = ln2, x = - 4 et x = 0.

Exercice n°1 :

1) $\frac{i-z}{1-z} \in IR^* \Leftrightarrow \frac{z_{\overrightarrow{MB}}}{z_{\overrightarrow{MA}}} \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MA}$ sont colinéaires, avec M ≠ B et M ≠ A

$\Leftrightarrow$ M ∈ (AB) \ {A, B} donc c'est **a)**

2) A et B sont deux événements indépendants ⇒ p(A ∩ B) = p(A) × p(B).

⇒ p(A ∪ B) = p(A) + p(B) - p(A ∩ B) = p(A) + p(B) - p(A) × p(B) = 0.1 + 0.5 – 0.05 = 0.55

Donc c'est **b)**

3) $\mathcal{V} = \int_1^e \pi\left(1+\ln x\right)dx = \pi\left[x + x\ln x - x\right]_1^e = \pi e$ donc c'est **b)**

Exercice n°2 :

1) a) $p(X \geq 8) = 0.28 \Leftrightarrow e^{-8\lambda} = 0.28 \Leftrightarrow -8\lambda = \ln(0.28) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln(0.28)}{8} = 0.159$

b) 3 mois en années est $\frac{1}{4}$ année

$P(X \leq \frac{1}{4}) = 1 - e^{-\frac{1}{4}\lambda} = 1 - e^{-\frac{0.159}{4}} = 0.039$

c) $p(X \leq T) = 4p(X \geq T)$

$\Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda T} = 4e^{-\lambda T} \Leftrightarrow e^{-\lambda T} = \frac{1}{5} = 0.2 \Leftrightarrow -\lambda T = \ln(0.2) \Leftrightarrow T = -\frac{\ln(0.2)}{\lambda} = -\frac{\ln(0.2)}{0.159} \simeq 10{,}12$

2) $p(X \geq 10 | X \geq 6) = \frac{p\left((X \geq 10) \cap (X \geq 6)\right)}{p(X \geq 6)} = \frac{p(X \geq 10)}{p(X \geq 6)} = \frac{e^{-10\lambda}}{e^{-6\lambda}} = e^{-4\lambda} = e^{-4\times 0.159} \simeq 0{,}529$

3) Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'appareils ayant une durée de vie X ≥ 8.

Y suit une loi binomiale de paramètres n et p = p(X ≥ 8) = 0.28

a) $p_n = p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - (0{,}72)^n$.

b) $p_n \geq 0.998 \Leftrightarrow 1 - (0{,}72)^n \geq 0{,}998 \Leftrightarrow (0{,}72)^n \leq 0{,}002 \Leftrightarrow n\ln(0{,}72) \leq \ln(0{,}002)$

$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0.002)}{\ln(0.72)} \simeq 18.91 \Leftrightarrow$ n est un entier supérieur ou égal à 19.

Exercice n°3 :

1) a) $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BF}$

b) M ∈ (E) ⇔ $\left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}\right) \wedge \overrightarrow{BM} = \vec{0}$ ⇔ $\overrightarrow{BF} \wedge \overrightarrow{BM} = \vec{0}$ ⇔ $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires ⇔ M ∈ (BF).

c) M ∈ (F) ⇔ $\left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}\right) \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ ⇔ $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ ⇔ M apartient au plan passant par B et ayant pour vecteur normal $\overrightarrow{BF}$ ⇔ M ∈ (ABC).

2) a) $2\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AC}$ ⇔ A est le milieu de [PC] ⇔ P est le symétrique de C par rapport à A.

b) M ∈ (G) ⇔ $\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|$ ⇔

$\left\|\overrightarrow{MP}\right\| = \left\|2\left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MI}\right)\right\| \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{MP}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{IB}\right\| \Leftrightarrow PM = BD = AC = \sqrt{2} \Leftrightarrow M \in S_{(P,\sqrt{2})}$: la sphère de centre P et de rayon $\sqrt{2}$.

c) PA = AC = $\sqrt{2}$ ⇒ A ∈ (G).

Exercice n°4 :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n - 1} \text{ pour tout n de IN} \end{cases}$$

1) a) Montrons par recurrence que pour tout n de IN, $1 < u_n < 2$.

- Pour n = 0, $1 < u_0 = \dfrac{3}{2} < 2$
- Pour n ≥ 0, supposons que $1 < u_n < 2$ et montrons que $1 < u_{n+1} < 2$

En effet :

$1 < u_n < 2 \Rightarrow 0 < u_n - 1 < 1 \Rightarrow 0 < \sqrt{u_n - 1} < 1 \Rightarrow 1 < 1 + \sqrt{u_n - 1} < 2 \Rightarrow 1 < u_{n+1} < 2$

Ainsi ∀ n ∈ IN, $1 < u_n < 2$

b) $u_{n+1} - u_n = 1 + \sqrt{u_n - 1} - u_n = \sqrt{u_n - 1} - (u_n - 1) = \sqrt{u_n - 1}\left(1 - \sqrt{u_n - 1}\right)$

Or $1 < u_n < 2 \Rightarrow 0 < u_n - 1 < 1 \Rightarrow \sqrt{u_n - 1} < 1 \Rightarrow 1 - \sqrt{u_n - 1} > 0$

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n = \underbrace{\sqrt{u_n - 1}}_{>0}\underbrace{\left(1 - \sqrt{u_n - 1}\right)}_{>0} > 0$

$\Rightarrow (u_n)$ est croissante.

c) (u_n) est croissante et majorée par 2 ⇒ (u_n) est convergente vers un réel $\ell \in [1, 2]$

$$\begin{cases} (u_n) \text{ converge vers } \ell \in [1,2] \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ avec } f(x) = 1+\sqrt{x-1} \ \forall\, x \in [1,+\infty[\\ f \text{ est continue sur } [1,+\infty[\text{ donc en } \ell \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(\ell) = \ell \Leftrightarrow 1+\sqrt{\ell-1} = \ell \Leftrightarrow \sqrt{\ell-1}\left(1-\sqrt{\ell-1}\right) = 0 \Leftrightarrow \ell = 1 \text{ ou } \ell = 2$$

Or $u_n \geq u_0 = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \ell \geq \dfrac{3}{2} \Rightarrow \ell = 2$.

2) $v_n = \ln(u_n - 1)$

a) $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}-1) = \ln\sqrt{u_n-1} = \dfrac{1}{2}\ln(u_n-1) = \dfrac{1}{2}v_n \ \forall \text{ n} \in \text{IN}$

$\Rightarrow (v_n)$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

b) $\dfrac{1}{2} \in]-1,1[\ \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

c) $u_n = 1+e^{v_n} \ \forall \text{ n} \in \text{IN} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 1+\underbrace{e^{v_n}}_{e^0=1} = 2$

Exercice n°5 :

A) 1) $(E_1) : y' = 3y \Leftrightarrow y(x) = ke^{3x}$

$(E_2) : y' = 2y \Leftrightarrow y(x) = k'e^{2x}$

2) $\text{f}(x) = \text{f}_1(x) + \text{f}_2(x) = ke^{3x} + k'e^{2x}$

f(0) = - 2 ⇔ k + k ′ = - 2

f ′ (0) = - 3 ⇔ 3k + 2k ′ = - 3

$$\begin{cases} k+k' = -2 \\ 3k+2k' = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3k+3k' = -6 \\ 3k+2k' = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k' = -3 \end{cases} \Rightarrow \text{f}(x) = e^{3x} - 3e^{2x} \ \forall\, x \in \text{IR}.$$

B) $\text{f}(x) = e^{3x} - 3e^{2x}$

1) f est dérivable sur IR et on a : $\text{f}'(x) = 3e^{3x} - 6e^{2x} = 3e^{2x}\left(e^x - 2\right)$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{e^{3x}}_{0} - 3\underbrace{e^{2x}}_{0} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{e^{2x}}_{+\infty}\underbrace{\left(e^{x}-3\right)}_{+\infty} = +\infty$$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{e^{2x}}{x}}_{+\infty}\underbrace{\left(e^{x}-3\right)}_{+\infty} = +\infty \Rightarrow \mathcal{C}$ admet une branche parabolique de direction celle de $\left(O,\vec{j}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

2) a) g est continue et strictement croissante sur $[\ln 2, +\infty[\Rightarrow$ g réalise une bijection de $[\ln 2, +\infty[$ sur $I = [-4, +\infty[$.

b) $\mathcal{C}' = S_\Delta(\mathcal{C})$ où $\Delta : y = x$.

c) Par raison de symétrie par rapport à Δ, on a :

$$A = \int_{\ln 2}^{\ln 3} |f(x)|\,dx = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \left(3e^{2x} - e^{3x}\right)dx = \left[\frac{3}{2}e^{2x} - \frac{1}{3}e^{3x}\right]_{\ln 2}^{\ln 3} = \left(\frac{27}{2} - \frac{27}{3}\right) - \left(6 - \frac{8}{3}\right) = \frac{7}{6}U.A$$