$4^{éme}$ Année * Section : Sc.	Série d'exercices
Réalisé par : Prof : Karmous .A	Fonction Ln

Exercice 1

I/ Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 2\ln x$

a/ calculer la limite de g en (0^+) et en $(+\infty)$

b/ dresser le tableau de variation de g, puis en déduire le signe de g.

II/ Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2+2+2\ln x}{x}$

1) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
2) Dresser le tableau de variation de f
3) Montrer que la droite (D) d'équation : y = x est une asymptote au voisinage de $+\infty$
4) En déduire la position de (D) et la courbe (Cf) de f
5) Déterminer un point de la courbe (C) où la tangente est parallèle a la droite D.
6) Tracer dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$: (D), (T) et (Cf).
7) Calculer l'aire de la partie du plan limité par (C) , la droite D et les droites d'equations respectives : $x = \frac{1}{e}$ et $x = e$

Exercice 2

A) Soit la fonction g définie sur$]0,+\infty[$par $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$.

1) Etudier les variations de g.
2) Calculer g(1) puis déduire le tableau de signe de g(x).

B) Soit la fonction f définie sur$]0,+\infty[$ par $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$ et on désigne par (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé.

1) Calculer les limites de f en 0^+ et $+\infty$.
2) Montrer que pour tout x $\in]0,+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ puis dresser le tableau de variation de f.
3) a) Montrer que la droite D : y = x -1 est asymptotes oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$.
   b) Etudier la position relative de (C_f) et D.
4) Tracer (C_f) et D .

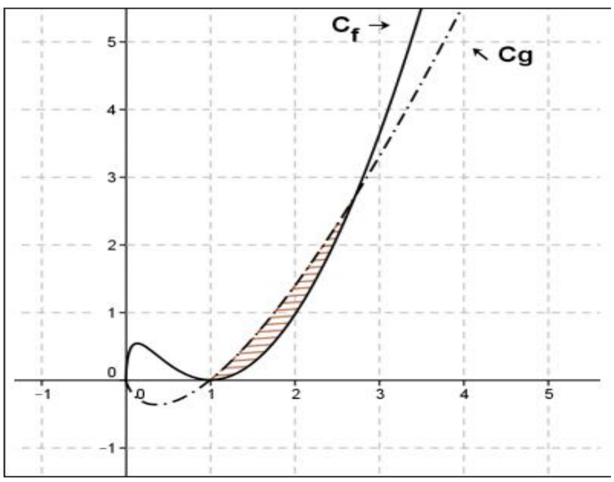
C) Soit un réel t $\in [1,+\infty[$et soit A (t) l'aire de la partie du plan limite par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations x=1 et x = t.

1) Montrer que $A(t) = \frac{1}{2}t^2 - t - \frac{1}{2}(\ln t)^2 + \frac{1}{2}$.
2) Calculer $\lim_{t\to+\infty} A(t)$.

Exercice 3

Soit la suite I définie sur IN par : $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n\,dx$

1) a) Par une intégration par partie, montrer que : $I_{n+1} = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}(n+1)I_n$
   b) Vérifier que $I_0 = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}$ puis déduire les valeurs de I_1 et I_2.
2) Soit les fonctions définis sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x(\ln x)^2$ et $g(x) = x\ln x$. Le graphe ci-dessous représente les courbes (C_f) et (C_g) celles des fonctions f et g dans un repère orthonormé.
   a) Par calculs, déterminer les abscisses des points d'intersections de (C_f) et C_g.
   b) Graphiquement, dresser le tableau de signe de $[f(x)-g(x)]$.
   c) Soit A l'aire de la partie hachurée dans le graphe. Montrer que $A = I_1 - I_2$ puis déduire sa valeur.
3) soit la fonction F définie sur $[0,+\infty[$ par $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2(\ln x - 1)^2 & si \quad x \succ 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$
   a) Montrer que F est continue à droite en 0.
   b) Etudier la dérivabilité de F à droite en 0.
   c) Montrer que pour tout x $\in]0,+\infty[$ on a : $F'(x) = f(x) - g(x)$.
   d) Dresser le tableau de variation de F.



Exercice 4

A) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x + 1 + \ln x$

1) a/ Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

b/ Etudier les variations de g.

2) a/ Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0,+\infty[$ une unique solution α et que $0{,}27 < \alpha < 0{,}28$

b/ Déduire le signe de $g(x)$ pour $x \in]0,+\infty[$

B) Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\ln x}{x+1} & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

1) a/ Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

b/ Montrer que f est continue à droite en 0.

c/ Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat./

2) a/ Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$.

b/ Vérifier que $f(\alpha) = -\alpha$

c/ Dresser le tableau de variation de f

3) a/ Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter le résultat graphiquement.

b/ Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Exercice 5

Soit f et g les fonctions définies sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x - \frac{x-1}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x .$$

On désigne par C_f et C_g les courbes de f et g dans un même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement ces résultats.

b) Justifier que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

2) a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que :

pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3) On donne, ci-contre, le tableau de variation de la fonction $g - f$.

x	0		1		$+\infty$
$g-f$	$+\infty$	↘	0	↗	1

a) Préciser la position relative des courbes C_f et C_g.

b) Soit a un réel de $]1,+\infty[$, M le point de la courbe C_f d'abscisse a et N le point de la courbe C_g de même abscisse a.

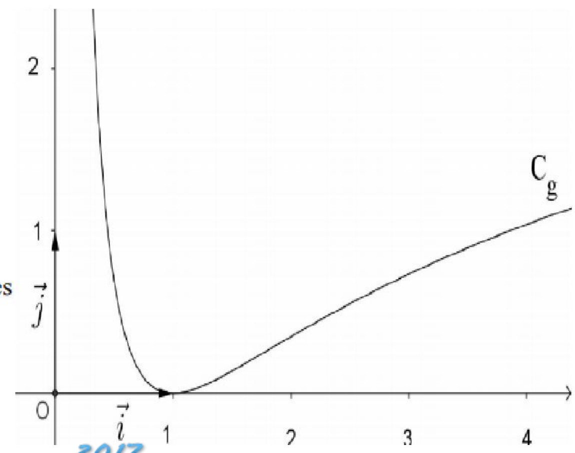
Justifier que $MN < 1$.

4) Dans **l'annexe** ci-jointe, on a tracé la courbe C_g.

a) Tracer la courbe C_f.

b) Vérifier que pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $g(x) - f(x) = 1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln x}{x}$.

c) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C_f, C_g et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.



Exercice 6

Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x-\dfrac{\ln x}{x}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1/ a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)-x$.

b) En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes que l'on précisera.

c) Etudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite Δ d'équation $y=x$.

2/ a) Montrer que, pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{(x^2-1)+\ln x}{x^2}$.

b) Montrer que

(x^2-1) et $\ln x$ sont de même signe sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.

c) En déduire le signe de $f'(x)$ sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.

d) Montrer que 1 est l'unique solution de l'équation $f'(x)=0$.

e) Dresser le tableau de variation de f.

3/ a) Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet une unique tangente D parallèle à la droite Δ.

Préciser les coordonnées du point B, point de contact de $\mathscr{C}$ et D.

b) Donner une équation de D.

4/ Dans l'annexe ci-jointe **(Figure 2)**, on a tracé relativement au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la droite Δ et la courbe (Γ) d'équation $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

a) Soit le point $A(\frac{1}{e},0)$.

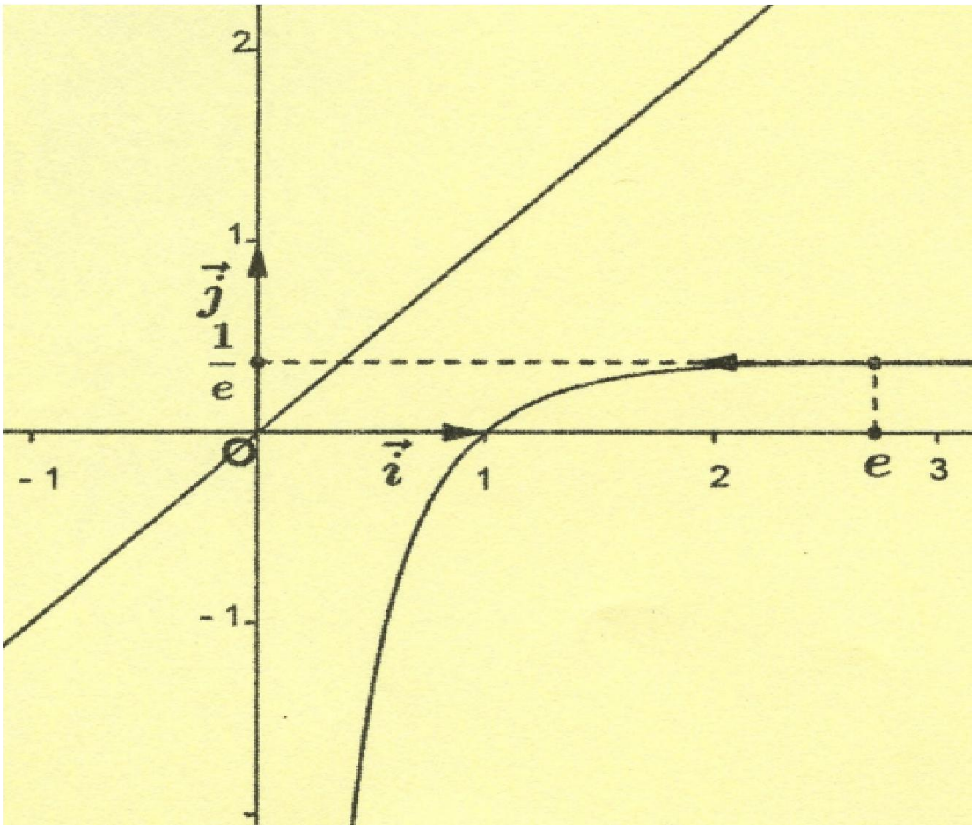
Placer le point A et vérifier que A appartient à D.

b) Tracer la droite D et placer le point B.

c) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

5/ Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équations $x=\dfrac{1}{e}$ et $x=e$.

Calculer $\mathscr{A}$.



Exercice 7

1/ Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=x-\ln x$.

a) Etudier le sens de variation de g.

b) En déduire que pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $g(x)>0$.

2/ Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=2x-(\ln x)^2$.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$..

b) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x}$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

3/ Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On désigne par C_f la courbe représentative de f et par Δ la droite d'équation $y=2x$.

a) Vérifier que Δ est la tangente à C_f en son point d'abscisse 1.

b) Montrer que C_f admet une direction asymptotique qui est celle de la droite Δ.

c) Étudier la position relative de C_f et Δ.

4/ a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α et que $\dfrac{1}{4}<\alpha<\dfrac{1}{2}$.

b) Tracer la courbe C_f.

c) Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la droite Δ, la courbe C_f et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

En utilisant une intégration par parties, montrer que $\mathscr{A}=e-2$.

<u>Exercice 8</u>

Dans l'annexe ci-jointe $(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.

C_f est la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x)=-\frac{x^2+x\ln x+x}{(x+1)^2} \quad \text{pour } x>0 \text{ et } f(0)=0.$$

Le réel α est l'abscisse du point d'intersection de la courbe C_f avec l'axe des abscisses autre que le point O.

1) a/ Par lecture graphique, donner le signe de $f(x)$.

b/ Montrer que $\ln\alpha=-(\alpha+1)$.

2) On considère la fonction g définie sur $[\alpha,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{x\ln x}{x+1}+1$

et on désigne par C_g la courbe représentative de g dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=0$.

3) a/ Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[\alpha,+\infty[$, $g'(x)=-\dfrac{f(x)}{x}$.

b/ Dresser le tableau de variation de g.

4) a/ Montrer que $g(\alpha)=1-\alpha$.

b/ Construire alors, sur l'annexe, le point de la courbe C_g d'abscisse α.

c/ Tracer la courbe C_g.

5) On désigne par **A** l'aire (en unité d'aire) de la partie du plan limitée par les courbes C_g , C_f et les droites d'équations $x=\alpha$ et $x=1$.

a) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que

$$\int_\alpha^1 f(x)dx=-[xg(x)]_\alpha^1+\int_\alpha^1 g(x)dx.$$

b/ En déduire que **A** $=\alpha^2-\alpha+1$.