LYCEE SAID BOU BAKKER MOKNINE PROF: HANNACHI SALAH « 4éme Sciences experimentales »	SERIE D'EXERCICES N°6 *Dérivabilité d'une fonction*

EXERCICE 1 :

Soit la fonction f définie sur$]0, +\infty[$ par f(x)= $\sqrt{1+\frac{1}{x}}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) a) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $f'(x)=\frac{-1}{2x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$

   b) Dresser le tableau de variation de la fonction f et tracer sa courbe C_f

   c) En déduire que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle K à préciser.

2) a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]0, +\infty[$ une unique solution α et que $1< \alpha < \sqrt{2}$

   b) Montrer que α est une solution de l'équation : $\alpha^3 - \alpha - 1 = 0$

3) a) Montrer que $\forall\ x \in [1, +\infty[$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

   b) En déduire que pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

4) Soit la suite réelle (u_n) définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

   a) Montrer que pour tout n ∈IN, on a : $u_n \geq 1$.

   b) Montrer que pour tout n ∈IN, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

   c) En déduire que pour tout n ∈IN, on a : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

EXERCICE 2 :

Soit f une fonction définie par $f(x) = \sqrt{x+1}$

1) *En appliquant les inégalité des accroissements finis ,montrer que*

$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; 1 + \frac{x}{\sqrt{6}} \leq f(x) \leq 1 + \frac{x}{2}$

2)a) *Interpreter graphiquement ce résultat.*

b) *Déduire un encadrement de $\sqrt{1.1}$ d'amplitude 10^{-2}*

3)*Soit g une fonction définie par $g(x) = tg(x)$.*

Montrer que pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ on a $x \leq g(x) \leq 2x$

EXERCICE 3 :

1) En utilisant l'une des inégalités des accroissements finis, montrer que ∀ x ∈ IR on a : $|\sin x| \leq |x|$

2) En déduire le sens de variation de la fonction h : $x \mapsto 1 - \cos x - \frac{x^2}{2}$

3) Montrer alors que ∀ x ∈ $[0, \pi]$ on a : $1 - \cos x - \frac{x^2}{2} \leq 0$

4) Montrer que ∀ x ∈ $[0, \pi]$ on a : $x - \sin x \leq \frac{1}{6}x^3$. En déduire que ∀ x ∈ $[-\pi, 0]$ on a : $\frac{1}{6}x^3 \leq x - \sin x$

EXERCICE 4 :

Soit la fonction f définie sur $[0,1[$ par $f(x)=\sqrt{\frac{x}{1-x^2}}$. (C) étant sa courbe selon un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

A/ 1) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement ce résultat.

2) Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et que $f'(x)=\frac{x^2+1}{2(1-x^2)^2\sqrt{\frac{x}{1-x^2}}}$ pour tout $x\in]0,1[$.

3) Dresser le tableau de variation de la fonction f et tracer la courbe (C).

B/ 1) Montrer que f admet une fonction réciproque (qu' on notera f^{-1}) définie sur un intervalle J qu'on précisera.

2) Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur l'intervalle J.

3) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout réel x appartenant à J.

C/ Soit la fonction g définie sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ par : $g(x)=\cos(x).f(\sin(x))$. Soit (Γ) sa courbe dans un repère orthonormé du plan.

1) Montrer que pour tout réel x de $[0,\frac{\pi}{2}[$, on a : $g(x)=\sqrt{\sin x}$

2) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{g(x)}{x}=+\infty$. En déduire une interprétation géométrique.

3) Etudier la dérivabilité de la fonction g sur $[0,\frac{\pi}{2}[$.

4) Montrer que g réalise une bijection de $[0,\frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle K qu'on précisera.

5) Montrer que g^{-1} est dérivable sur K et que $(g^{-1})'(x)=\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$ pour tout réel $x\in K$

EXERCICE 5 :

Soit la fonction f définie sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ par $f(x)=1-\tan x$

1) Etablir le tableau de variation de la fonction f.

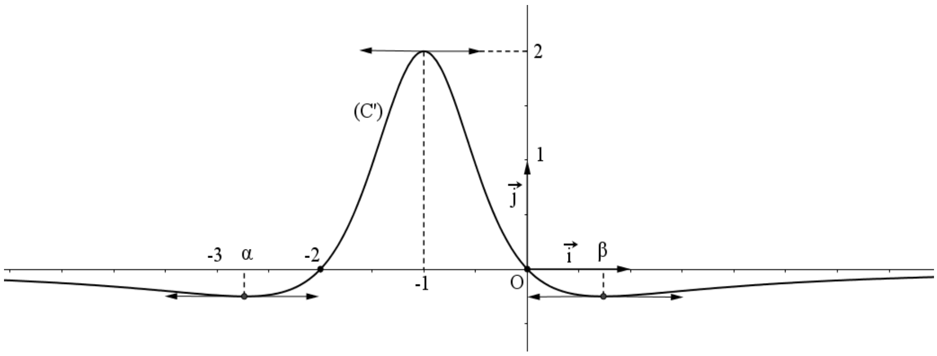
2) Montrer que la fonction f réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur IR.

3) a) Montrer que f^{-1} est dérivable sur iR

b) Calculer $(f^{-1})'(0)$ et $(f^{-1})'(2)$. Montrer que pour tout réel x, $(f^{-1})'(x)=\frac{-1}{x^2-2x+2}$

EXERCICE 6 :

On donne ci-contre dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe (C') de la fonction f' dérivée de la fonction f définie sur IR par : $f(x)=\frac{2(ax+b)}{x^2+2x+2}$ (où a et b sont deux réels). La courbe (C') admet uniquement 3 tangentes horizontales et elle coupe l'axe $(O,\vec{i})$ en exactement 2 points. On désigne par (C) la courbe représentative de f selon le repère orthonormé $(O',\vec{u},\vec{v})$.



1) a) Montrer que pour tout réel x, on a : $f'(x)=\frac{-2ax^2-4bx+4a-4b}{(x^2+2x+2)^2}$

b) Déterminer $f'(0)$ et $f'(-1)$. En déduire que a=b=1

2) Par une lecture graphique : a) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

b) Justifier que les points de (C) d'abscisses α, β et -1 sont des points d'inflexion de (C)