LYCEE SAID BOU BAKKER MOKNINE PROF: HANNACHI SALAH « 4$^{\text{éme}}$ Sciences experimentales »	SERIE D'EXERCICES *Les suites réelles*

EXERCICE 1 :

Soit la suite (u_n) définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n} \end{cases}$

I/ 1) Montrer que pour tout n∈IN, on a : $0 \leq u_n \leq 1$.

2) Montrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-u_n)}{1+u_n}$. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite L.

II/ On pose pour tout n∈IN, $v_n = \frac{2}{u_n} - 2$

1) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

2) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n. Retrouver alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) En se servant de la suite (v_n), calculer en fonction de n la somme : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{u_k}$

EXERCICE 2 :

On considère la suite réelle (u_n) définie sur IN par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+{u_n}^2}$

1) a) Montrer que pour tout n∈IN on a : $\frac{1}{2} \leq u_n < 1$

b) Etudier la monotonie de la suite (u_n). En déduire que la suite (u_n) est convergente.

2) a) Montrer que pour tout n∈IN on a : $0 < 1 - u_{n+1} \leq \frac{2}{5}(1 - u_n)$

b) A l'aide de raisonnement par récurrence, déduire que pour tout n∈IN, on a :

$0 < 1 - u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

EXERCICE 3 :

Soit la suite (u_n) définie sur IN^* par : $u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

1) Montrer que suite (u_n) est croissante

2) Montrer que pour tout $n \in IN^*$ on a : $u_n \geq \frac{n}{\sqrt{n}}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

EXERCICE 4 : (QCM)

Cocher l'unique réponse exacte :

1) Soit la suite (u_n) définie sur IN*par : $u_n = \frac{(-1)^n.\ sin(n)}{n}$ alors :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$ **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ **c)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ n'existe pas

2) Soit la suite (u_n) définie sur IN par : $u_n = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{3}{7}\right)^n} - 1}{\left(\frac{3}{7}\right)^n}$ alors :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$ **c)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

www.devoirat.net 2017

EXERCICE 5 :

Soit (u_n) la suite réelle définie sur IN* par : $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$

1) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, on a : $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$

2) En déduire que : pour tout $n \in IN^*$, on a : $|u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$.

3) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

EXERCICE 6 :

Soit (a_n) une suite réelle définie sur IN par : $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+\sqrt{1+a_n^2}}$

1) a) Montrer que pour tout $n \in IN$, on a : $0 < a_n \leq 1$

b) Etudier la monotonie de (a_n), puis déduire qu'elle converge et calculer sa limite ℓ.

2) Pour tout $n \in IN$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$, $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$

a) Calculer : u_0 et v_0

b) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite L.

c) Montrer que $2-\sqrt{2} \leq L \leq 1$

EXERCICE 7 :

On considère les suites réelles (u_n) et (v_n) définies par :

$u_0 = 12$, $v_0 = 1$, $u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$; $n \in IN$

1) Montrer que la suite $(u_n - v_n)$ est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

2) En déduire que pour tout $n \in IN$, on a : $u_n \geq v_n$

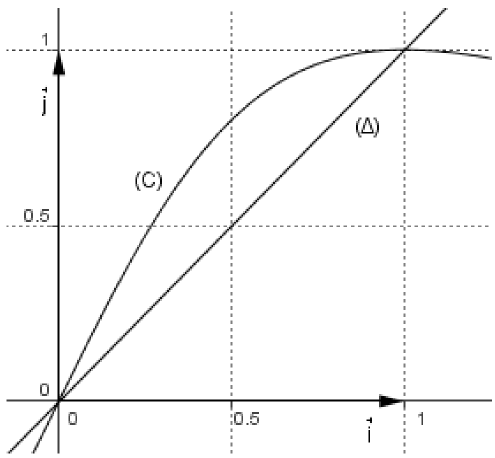
3) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite ℓ.

4) On pose pour tout $n \in IN$, $t_n = 3u_n + 8v_n$

a) Montrer que (t_n) est une suite constante.

b) En déduire la valeur de ℓ.

EXERCICE 8 :



Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

Dans le graphique ci-contre on a tracé une partie de la courbe (C) de f et la droit Δ : y=x. Soit la suite réelle (u_n) définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1) Indiquer sur l'axe des abscisses $(O,\vec{\imath})$ les quatre premiers termes de la suite (u_n) sans les calculer. Que peut-on conjecturer à propos de la monotonie de la suite (u_n) et de sa convergence.

2) a) Dresser le tableau de variation de la fonction f

b) Montrer que $f(x) \geq x$ pour tout $x \in [0,1]$.

3) En déduire que :

a) $0 < u_n < 1$ pour tout $n \in IN$. **b)** La suite (u_n) est croissante

4) Montrer alors que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite ℓ.

www.devoirat.net 2017