Afli Ahmed
L. Ibn Khaldoun Jammel

Série d'exercices n° : 02

Continuité et Limites

2016 / 2017 BAC Sc.exp

❖ Exercice n°1 :

Calculer les limites suivantes si elle existent :

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{9x^2-8x+6}-x$; b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2-8x+6}-x$; c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2+3}+x$

d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}+x}{x}$; e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+x-3}{x^2+ax}$ ou $a\in\Re$; f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2x-5}}{2x}$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{3x^2+x-1}+x$; h) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{|x||x-2|}{x(x^2-x-2)}$; i) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{2x+2}-2}{x-1}$

j) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}}{x-1}$; k) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3+x^2}}{x-1}$; l) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{|x||x-2|}{x(x^2-x-2)}$

❖ Exercice n°2 :

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to0} \sqrt{\dfrac{\sin x}{x}}$; b) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x+\sin 2x}{\sin x-\sin 2x}$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-\sin^2 x}{2+\sin x}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}x-\sin 2x\right)$; e) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2(3+\cos x)$; f) $\lim\limits_{x\to0} \sqrt{x}\cos\dfrac{1}{x}$

❖ Exercice n°3 :

Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} & \text{si } x<0 \\ f(x)=\dfrac{x^3\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)}{1+x^2} & \text{si } x>0 \end{cases}$

1°)a) Montrer que pour tout x > 0, $|f(x)|\le x^3$

b) En déduire la limite de f à droite en 0

c) f est elle prolongeable par continuité en 0 ?

2°)a) Montrer que f est continue sur $]0,+\infty[$.

b) Montrer que l'équation : $\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)=\dfrac{x^2+1}{x^3}$ admet au moins une solution dans [1 , 2]

3°) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\pi$, interpréter graphiquement les résultats obtenus.

❖ Exercice n°4 :

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+\sqrt{x}\cos x}{x+2} & si\ x\geq 0\\ \dfrac{x^2}{4(\sqrt{x^2+1}-1)} & si\ x\prec 0\end{cases}$

1) Montrer que f est continue en 0
2) a. Montrer que pour tout réel positif x on a : $\dfrac{1-\sqrt{x}}{x+2}\leq f(x)\leq\dfrac{1+\sqrt{x}}{x+2}$

   b. En déduire la limite de $f(x)$ en $+\infty$

3) Déterminer, en justifiant la réponse, les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(\dfrac{1}{\sqrt{x}})$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(1-\sin x)$
4) a. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$ une solution qu'on notera α

   b. Montrer que $\tan(\alpha)=-\sqrt{\alpha-1}$

❖ Exercice n°5 :

Soit la fonction f définie sur IR* par f(x) = $\begin{cases}x^2\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & si\quad x<0\\ \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & si\quad x>0\end{cases}$

1) Montrer que f est continue sur IR*.

2)a. Vérifier que pour tout $x<0, -x^2\leq f(x)\leq x^2$

b. Calculer alors $\lim_{x\to 0^-} f(x)$

c. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. (On notera F son prolongement)

d. Vérifier que pour tout $x<0$; $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}\times\frac{sin(\pi x)}{x}$

En déduire que $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

e. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, Interpréter graphiquement le résultat

3) Le tableau ci-dessous donne les variations d'une fonction g continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$g(0)=2\ \ et\ g(2)=0$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$g(x)$	0	↗	3	↘	0	↘	$-\infty$

a. Calculer $\lim_{x\to-\infty} f\circ g(x)\ et\ \lim_{x\to+\infty} f\circ g(x)$

b. Calculer $\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{g(x)}$,

c. Montrer que $f\circ g$ est continue sur$]-\infty,2[$.

d. Montrer que $f\circ g(x)=\dfrac{1}{2}$ admet au moins une solution dans [0,2].