Fonction logarithme népérien
Géométrie dans l'espace

EXERCICE 1 :

On pose pour tout $n \in$ IN*, $u_n = \int_1^e (lnx)^n . dx$

1) a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et que $u_n \geq 0$ pour tout n∈ IN

   b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

2) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout n∈ IN, $u_{n+1} = e - (n+1)u_n$

3) a) En tenant compte des questions 1)a) et 2), montrer que $\frac{e}{n+2} \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}$

   b) Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4) Soit la fonction $f : x \longmapsto (lnx)^2$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

   a) Montrer que $u_1 = 1$. En déduire u_2 et u_3.

   b) Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de $(O,\vec{\imath})$ de la partie du plan limitée par (C), l'axe $(O,\vec{\imath})$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

EXERCICE 2 :

A/ Le tableau ci-contre représente les variations d'une fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par :

$\begin{cases} f(x) = x^2(a + b.lnx) \\ f(0) = 0 \end{cases}$ (où a et b sont deux réels).

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	↗	$\frac{e}{2}$	↘	$-\infty$

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

On suppose que la courbe représentative (C) de f passe par le point A(1,1) et que la tangente T à (C) en ce point a pour équation : $y = x$

1) Déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.

2) En déduire les valeurs de a et b.

B/ Dans la suite on prend : $\begin{cases} f(x) = x^2(1 - lnx) \text{ pour tout } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) Calculer $f'_d(0)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) Montrer que la courbe (C) admet une branche parabolique au $V(+\infty)$ qu'on précisera.

3) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) et l'axe des abscisses.

4) a) Etablir le tableau de variation de la fonction $h : x \longmapsto x - xlnx - 1$

   b) En déduire alors la position de (C) par rapport à T.

5) Tracer la tangente T et la courbe (C).

EXERCICE 3 :

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x) = -x + ln(x^2 + 1)$

1) a) Etablir le tableau de variation de la fonction f.

   b) En déduire que $ln(x^2 + 1) \leq x$ pour tout réel $x \in [0,+\infty[$

2) Etudier la branche infinie de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

3) Tracer la courbe (C).

4) Soit la suite (u_n) définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}ln(1+{u_n}^2) \ \forall\, n \in IN \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n \in IN$, on a : $u_n > 0$

b) Montrer que pour tout $n \in IN$, on a : $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$

c) En déduire que pour tout $n \in IN$, on a : $u_n \leq \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

d) Prouver alors que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

EXERCICE 4 :

1) Comparer $\frac{1}{x}$ et 1pour tout réel $x \geq 1$.

2) En déduire que pour tout réel $x \geq 1$, on a : $lnx \leq x - 1$. Déterminer alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^3}$

EXERCICE 5 :

1) Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = lnx - xlnx + x$

a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

b) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x} - lnx$

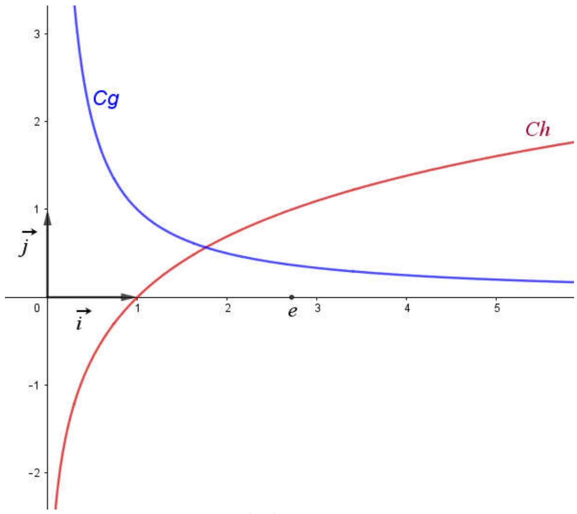
2) Dans la figure ci-contre C_g et C_h sont les courbes représentatives dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ des fonctions g et h définies sur $]0, +\infty[$ par :

$g(x) = \frac{1}{x}$ et $h(x) = lnx$.

C_g et C_h se coupent en un point d'abscisse β.

a) Par lecture graphique donner le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de $x > 0$.
En déduire le tableau de variation de f

b) Montrer que $f(\beta) = \beta + \frac{1}{\beta} - 1$



3) On désigne par C_f la courbe représentative de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

a) Etudier la position relative des courbes C_f et C_h.

b) Montrer que la courbe C_f coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses respectives x_1 et x_2 telles que $0{,}4 < x_1 < 0{,}5$ et $3{,}8 < x_2 < 3{,}9$

c) Placer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les points $A(\beta, 0)$ et $B(0, \frac{1}{\beta})$ et en déduire une construction du sommet S de la courbe C_f

d) Tracer alors la courbe C_f.

EXERCICE 6 :

L'espace étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit S_m l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que :
$x^2 + y^2 + z^2 + (2m-6)x + (2m+4)y - 2z + 2m^2 - 8 = 0$; (m est un paramètre réel)

1) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles S_m est une sphère et préciser dans ce cas les coordonnées de son centre I_m et son rayon R_m.

2) Déterminer l'ensemble des points I_m lorsque m varie dans l'intervalle $\left]-\infty, \frac{21}{2}\right]$

3) On considère la droite Δ : $\begin{cases} x = 3 + 2\alpha \\ y = -2 + \alpha \\ z = 1 - \alpha \end{cases}$; $\alpha \in IR$

Déterminer les deux sphères S_m qui sont tangentes à Δ.