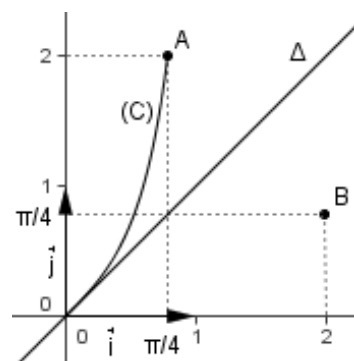


## Les intégrales Géométrie dans l'espace

### EXERCICE 1 :

La courbe représentative (C) ci-contre est celle de la fonction  $f$  définie sur  $]0, \frac{\pi}{4}[$  par :  $f(x) = (\tan x)^3 + \tan x$ . La courbe (C) admet au point O une demi-tangente à droite portée par la droite  $\Delta : y = x$ .



- 1) Calculer  $\int_0^{\pi/4} f(x) dx$
- 2) a) Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque (notée  $f^{-1}$ ) dont on précisera le domaine de définition  $J$ .  
b) Tracer la courbe (C') de la fonction  $f^{-1}$ .  
c) Calculer  $\int_0^2 f^{-1}(x) dx$
- 3) Calculer en (u.a) l'aire  $\mathcal{A}$  de la partie du plan limitée par (C) et (C') et le segment [AB].

### EXERCICE 2 :

Soit  $F$  la fonction définie sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$  par  $F(x) = \int_1^{\tan^2 x} \frac{dt}{\sqrt{t}(t+1)}$

- 1) Montrer que  $F$  est dérivable sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$  et que pour tout  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , on a :  $F'(x) = 2$
- 2) Calculer  $F(\frac{\pi}{4})$ . En déduire que pour tout  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , on a :  $F(x) = 2x - \frac{\pi}{2}$
- 3) a) Calculer alors  $I = \int_1^3 \frac{dt}{\sqrt{t}(t+1)}$   
b) A l'aide d'une intégration par parties, calculer  $J = \int_1^3 \frac{\sqrt{t}}{(t+1)^2} dt$

### EXERCICE 3 :

Soit la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $u_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$

- 1) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
- 2) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  
$$u_{n+2} = \frac{1}{3} \int_0^1 x^n (1-x^2) \sqrt{1-x^2} dx$$
  
b) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $u_{n+2} = \frac{n+1}{n+4} u_n$   
c) Calculer alors  $\int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$  et  $\int_0^1 x^5 \sqrt{1-x^2} dx$

### EXERCICE 4 :(QCM)

Pour chacune des propositions suivantes, une seule réponse est correcte. Préciser la :

- 1) La suite  $(I_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $I_n = \int_0^n \sqrt{x} \sin^2 x dx$  est une suite :  

a) croissante	b) décroissante	c) stationnaire
---------------	-----------------	-----------------
- 2) Soit le réel  $I = \int_{-1}^1 x^2 \cdot \sin^3 x dx$ . Alors :  

a) $I < 0$	b) $I = 0$	c) $I > 0$
------------	------------	------------

3) On pose pour tout  $x \in ]0, 1[$ ,  $F(x) = \int_x^{x^2} \cos^2 t \cdot dt$ . Alors :

a)  $F(x) < 0$

b)  $F(x) = 0$

c)  $F(x) > 0$

4) Soit  $f$  une fonction continue sur  $[2, 3]$  telle que :  $4 \leq f(x) \leq 5$  alors :

a)  $4 \leq \int_2^3 f(x) dx \leq 5$

b)  $2 \leq \int_2^3 f(x) dx \leq 3$

c)  $0 \leq \int_2^3 f(x) dx \leq 1$

5) Soit  $C = \left\{ M(x, y) ; y = \frac{\tan x}{\cos x} \text{ et } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \right\}$  et  $S$  le solide obtenu par rotation de  $C$  autour de l'axe  $(Ox)$ . Alors le volume  $\mathcal{V}$  de  $S$  est égal à :

a)  $\frac{\pi}{3}$

b)  $\frac{2\pi}{3}$

c)  $\frac{\pi}{6}$

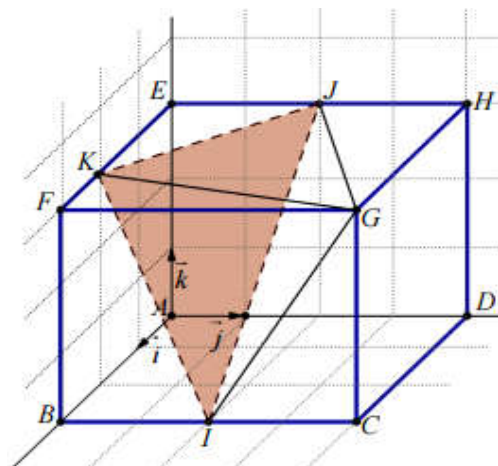
### EXERCICE 5 :

Dans l'espace  $\mathcal{E}$  muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère le point  $A(-5, 0, 0)$  et les plans  $(P) : 2x - y + 4z - 11 = 0$  et  $(Q) : x - 2y - z - 1 = 0$ .

- 1) a) Montrer que les plans  $(P)$  et  $(Q)$  sont perpendiculaires.  
 b) Donner un système d'équations paramétriques de leur droite d'intersection  $D$ .
- 2) Déterminer les coordonnées du point  $H$  projeté orthogonal de  $O$  sur la droite  $D$ .
- 3) a) Déterminer l'équation réduite de la sphère  $(S)$  de centre  $A$  et tangent au plan  $(P)$ .  
 b) Montrer que le plan  $(Q)$  coupe la sphère  $(S)$  suivant un cercle dont on caractérisera.

### EXERCICE 6 :

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé  $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère le parallélépipède  $ABCDEFGH$  tel que :  $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i}$ ,  $\overrightarrow{AD} = 4\vec{j}$  et  $\overrightarrow{AE} = 3\vec{k}$ . Soient les points  $I$  et  $J$  les milieux respectifs des arêtes  $[BC]$  et  $[EH]$ . Soit  $K$  le point défini par  $\overrightarrow{EK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$



- 1) Déterminer  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{CD}$  et  $\overrightarrow{GF} \wedge \overrightarrow{GE}$
- 2) Déterminer les coordonnées des points de la figure.
- 3) a) Calculer l'aire du triangle  $IJK$ .  
 b) Calculer le volume du tétraèdre  $IJKG$ .  
 c) En déduire la distance de  $G$  au plan  $(IJK)$ .
- 4) Ecrire une équation cartésienne du plan  $(IJK)$ .
- 5) a) Déterminer un système d'équations paramétrique de la droite  $\Delta$  perpendiculaire au plan  $(IJK)$  et passant par le point  $G$ .  
 b) Déterminer les coordonnées du point  $L$  intersection de  $\Delta$  et  $(IJK)$ .

### EXERCICE 7 :

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère le plan  $P_m : 2x - y + 2z + m = 0$  ; ( $m$  étant un paramètre réel). Soit l'ensemble  $(S)$  des points  $M(x, y, z)$  de l'espace vérifiant :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z + 8 = 0$$

- 1) Montrer que  $(S)$  est une sphère dont on précisera le rayon et le centre  $\Omega$ .
- 2) Etudier suivant les valeurs du paramètre réel  $m$  la position relative de  $(S)$  et le plan  $P_m$
- 3) a) Caractériser l'intersection de la sphère  $(S)$  et le plan  $P_3$ .  
 b) Déterminer une équation cartésienne de chacun des deux plans  $Q$  et  $Q'$  tangents à  $(S)$  et parallèles au plan  $P_3$ .

### **EXERCICE 8 :**

L'espace étant muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On donne les points  $A(-2, 2, 1)$ ,  $B(-2, 1, 2)$ ,  $C(-1, 1, 1)$  et  $\Omega(-1, 2, 2)$ .

- 1) Soit l'ensemble P des points  $M(x, y, z)$  de l'espace tels que  $\overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$ 
  - a) Vérifier que les points A, B et C appartiennent à P.
  - b) Montrer que P est un plan dont on donnera une équation cartésienne.
- 2) Calculer  $\overrightarrow{A\Omega} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$ . En déduire que  $\Omega \notin P$ .
- 3) Montrer que le point  $\Omega$  appartient à l'axe du cercle  $\mathcal{C}$  circonscrit au triangle ABC.
- 4) Soit S la sphère de centre  $\Omega(-1, 2, 2)$  et de rayon  $R = \sqrt{2}$ .
  - a) Ecrire une équation cartésienne de S.
  - b) Montrer que la sphère S coupe le plan P suivant le cercle  $\mathcal{C}$ .
  - c) Déterminer les coordonnées du centre H et le rayon r du cercle  $\mathcal{C}$ .

### **EXERCICE 9 :**

On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $I_n = \int_0^1 (1 - x^2)^n dx$

- 1) a) Vérifier que  $I_2 = \frac{8}{15}$ 
  - b) Au moyen d'une intégration par parties, montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :
$$I_{n+1} = (2n + 2) \int_0^1 x^2 (1 - x^2)^n dx$$
  - c) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n$
- 2) On considère les deux fonctions F et G définies sur  $\mathbb{R}$  par :
$$F_n(x) = \int_0^{\sin x} (1 - t^2)^n dt \quad \text{et} \quad G_n(x) = \int_0^x (\cos t)^{2n+1} dt$$
  - a) Montrer que f et g sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $F_n'(x)$  et  $G_n'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$
  - b) En déduire que pour tout réel x, on a :  $F_n(x) = G_n(x)$
  - c) En déduire la valeur de l'intégrale  $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^7 dt$

### **EXERCICE 10 :**

On considère la fonction f définie sur  $[0, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

On pose pour tout entier  $n > 0$ ,  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f(k)$  et  $I_n = \frac{1}{n} \int_0^n f(t) dx$

- 1) a) Vérifier que f est décroissante.
  - b) Montrer que la suite  $(S_n)$  est croissante.
- 2) Montrer que pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $\frac{1}{1+n^2} \leq I_n \leq 1$
- 3) a) Montrer que pour tout entier  $k \geq 0$ ,  $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dx \leq f(k)$ 
  - b) Montrer alors que pour tout entier  $n > 0$ ,  $S_n - 1 \leq I_n \leq S_n - \frac{1}{1+n^2}$
  - c) En déduire que pour tout entier  $n > 0$ , on a :  $\frac{n+1}{n(1+n^2)} \leq S_n \leq 2$
  - d) Dire alors pourquoi  $(S_n)$  est convergente et donner un encadrement de sa limite L.