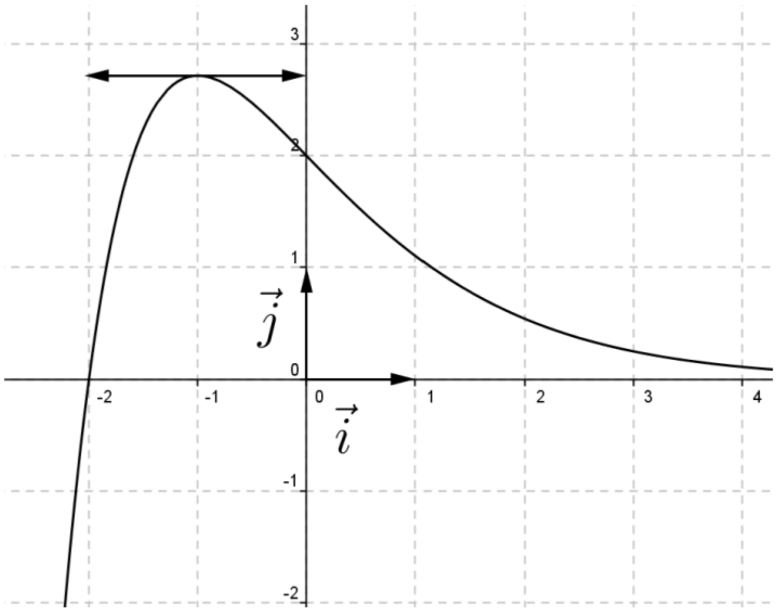
Problèmes de révision
Analyse

Séance 2

EXERCICE 1 :

On a représenté ci-dessous dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe (C) d'une fonction f solution de l'équation différentielle (E): $y' + y = e^{-x}$ et sa tangente au point d'abscisse (-1)
-La courbe(C) admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$ au voisinage de $-\infty$
-L'axes des abscisses est une asymptote à la courbe (C)



1) Par lecture graphique déterminer

a) $f(0)$ et $f'(-1)$

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$

2) a)Montrer que $f'(0) = -1$

b) En déduire une équation de la tangente à (C) point d'abscisse 0

3) a)Montrer que $f(-1) = e$

b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$

4)a)Montrer que la fonction $u(x) = xe^{-x}$ est une solution de(E).
b) Résoudre l'équation différentielle (E_0): $y' + y = 0$
c)Montrer qu'une fonction g dérivable sur IR est solution de (E) si et seulement si $g - u$ est solution de(E_0). En déduire toutes les solutions de(E).
d) Déterminer alors la fonction f

EXERCICE 2 :

I/ Soit l'équation différentielle (E) : $(e^{2x} - 1)y' + e^{2x}y = 0$.

1) Vérifier que $\forall\, k \in IR$ la fonction $u : x \mapsto \frac{k}{\sqrt{e^{2x}-1}}$ est une solution de (E) sur $]0,+\infty[$.
2) Montrer que si y est une solution de l'équation (E), alors $\mathcal{Z} = (e^{2x} - 1)y^2$ est constante sur IR.
3) En déduire la fonction positive f définie sur $]0,+\infty[$ qui vérifie l'équation (E) et telle que $f(ln\sqrt{2}) = 1$

II/ Dans toute la suite la fonction f est définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}$

1) a) Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$.
b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.
c) Tracer la courbe Γ de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2) Soit h la fonction définie sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $h(x) = \frac{1}{2}ln(1 + tan^2x)$

a) Montrer que h réalise une bijection de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $]0,+\infty[$.

b) Montrer que h^{-1} est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $(h^{-1})'(x) = f(x)$

c) Pour tout $\lambda > ln(\sqrt{2})$ on désigne par $\mathcal{A}_\lambda$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe Γ et les droites d'équations : $x = ln(\sqrt{2})$, $x = \lambda$ et $y = 0$.

Montrer que $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \mathcal{A}_\lambda = \frac{\pi}{4}$

3) Pour tout $n \in IN^*$, on pose $u_n = \int_{ln(\sqrt{2})}^{1} \frac{dx}{\sqrt{e^{2nx}-1}}$

a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $u_n \geq 0$

b) Montrer que (u_n) est décroissante et déduire qu'elle est convergente.

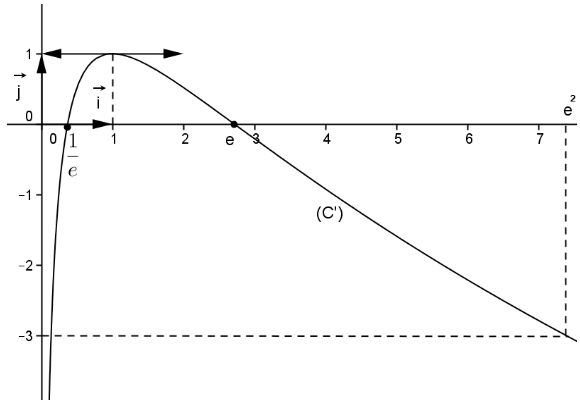
c) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $u_n \leq \frac{1}{\sqrt{2^n-1}}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

EXERCICE 3 :

Dans le graphique ci-contre on a tracé la courbe (C') de la fonction f' dérivée de la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par :

$\begin{cases} f(x) = -x(a + blnx)^2 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ où a et b sont deux réels tels que $a > 0$ et $b < 0$.

On admet que $f(\frac{1}{e}) = -\frac{4}{e}$ et $f(e) = 0$



1) a) En utilisant l'égalité : $x.ln^2x = \left(\sqrt{x}\,lnx\right)^2$ pour tout $x > 0$, calculer $\lim\limits_{x\to0^+} x.ln^2x$

b) En déduire que f est continue à droite en 0

2) A l'aide du graphique :

a) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

b) Déterminer $f'(1)$ et $f''(1)$.

c) Montrer que le point A(1,-1) est un point d'inflexion de (C) (la courbe de f selon un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

3) En se servant des valeurs de $f(\frac{1}{e})$ et $f(e)$, montrer que : a = 1 et b = -1.

4) Calculer en $(u.a)$ l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limtée par (C'), l'axe $(O,\vec{\imath})$ et les droites d'équations : $x = \frac{1}{e}$ et $x = e^2$.

5) a) Montrer que (C) admet au point O(0,0) une demi tangente verticale.

b) Etudier la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$.

c) Résoudre dans IR l'équation $f(x) = -x$ puis tracer (C) et la droite D : $y = -x$.

6) Calculer en $(u.a)$ l'aire $\mathcal{A}'$ de la partie du plan limitée par (C), la droite D et les droites d'équations $x = 0$ et $x = e^2$.