

Les fonctions exponentielles

EXERCICE 1 :

1) Ecrire chacune des expressions suivantes sous forme $e^{u(x)}$:

a) $\frac{(e^{x-3} \cdot e^{2-x})^2}{e^{1-x}}$

b) $(e^{2x-1})^3 \cdot e^{4-6x} \cdot e$

2) Développer chacune des expressions suivantes :

$A(x) = e^{-x}(3e^{2x} - e^x + xe^{-x})$ et $B(x) = (e^x + e^{-x}) \cdot (e^x - e^{-x})$

3) Factoriser par e^x chacune des expressions suivantes :

$E(x) = e^{3x} - 2e^x + 1$ et $F(x) = e^x - 2xe^{-x} + 4e^{2x}$

4) Montrer les relations suivantes :

$\ln(1 + e^x) = x + \ln(1 + e^{-x})$; $x \in \mathbb{R}$

EXERCICE 2 :

Pour chacune des propositions suivantes une seule réponse est correcte, préciser la :

1) Le réel $e^{-\ln(\frac{1}{e})}$ est égal à :

a) $\frac{1}{e}$

b) e

c) 1

2) Le réel $e^{|\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2})|}$ est égal à :

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $-\sqrt{2}$

3) Le réel $e^{(x+3\ln x)}$ est égal à :

a) $3xe^x$

b) $e^x + x^3$

c) $x^3 e^x$

EXERCICE 3:

Résoudre dans \mathbb{R} les équations et les inéquations suivantes:

a) $2e^{|3x-1|} - 3 = 0$

c) $\sqrt{4e^{3x-1} - 2} = 1$

b) $3e^{2x^2} + e^{x^2} - 2 = 0$

d) $\frac{1-3e^x}{2e^{x-3}} \geq 1$

EXERCICE 4:

Calculer chacune des limites suivantes :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x+3e^x+1}}{\sqrt{x}}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+e^x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2)$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2+x}}{x^2}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 + e^{-3x})e^x$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{4x} - 3e^x + x^2)$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^3}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - e^{\frac{1}{x}})$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$

EXERCICE 5:

Vérifier dans chacun des cas suivants que f est dérivable sur I et calculer $f'(x)$:

a) $f : x \mapsto x^2 \cdot e^x$; $I = \mathbb{R}$

c) $f : x \mapsto e^{x^2+x}$; $I = \mathbb{R}$

b) $f : x \mapsto e^{\left(\frac{1}{x}\right)}$; $I =]0, +\infty[$

d) $f : x \mapsto \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$; $I = \mathbb{R}$

e) $f : x \mapsto 2^x$; $I = \mathbb{R}$

EXERCICE 6:

Calculer (au moyen d'une primitive) chacune des intégrales suivantes :

$$\int_0^{\ln 2} (e^{4x} + 2e^{-x}) dx \quad ; \quad \int_0^1 x^2 e^{(x^3+1)} dx \quad ; \quad \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \quad ; \quad \int_0^{\ln 2} \frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}} dx$$

EXERCICE 7:

Soit La fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par : $f(x) = \ln(1 + e^{\frac{1}{x}})$

- 1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et que : $f'(x) = \frac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2(1+e^{\frac{1}{x}})}$
- 2) a) Montrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $] \ln 2, +\infty[$
b) Montrer que $f^{-1}(x) = \frac{1}{\ln(e^x - 1)} \quad \forall x \in] \ln 2, +\infty[.$

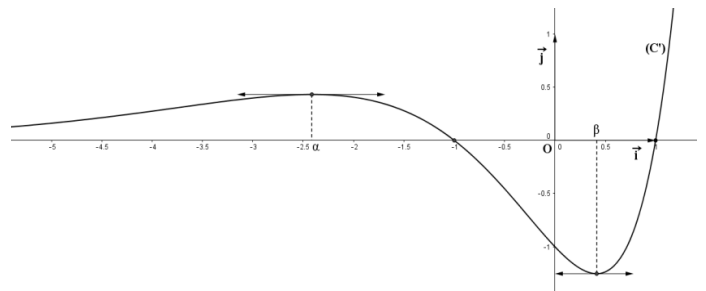
EXERCICE 8:

Dans la figure ci-contre, on a représenté dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe (C') de la fonction f' dérivée de la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = (ax + b)^2 \cdot e^x, \text{ où } a > 0 \text{ et } b < 0.$$

La courbe (C') admet une asymptote

d'équation : $y = 0$ au voisinage de $(-\infty)$ et une branche parabolique au voisinage de $(+\infty)$ de direction celle de l'axe (O, \vec{j}) .



I/ 1) A l'aide des valeurs graphiques de $f'(0)$ et $f'(-1)$, montrer que $a = 1$ et $b = -1$

2) Par une lecture graphique :

- a) Dresser le tableau de variation de f
- b) Montrer que la courbe (C) de f admet deux points d'inflexion A et B.

II/ 1) Prouver que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. En déduire une interprétation géométrique.

2) Vérifier que $f(x) - f'(x) = (2 - 2x)e^x$. En déduire la position de (C) par rapport à (C') .

3) Tracer (C) dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . (On prend $\alpha = -1 - \sqrt{2}$ et $\beta = -1 + \sqrt{2}$)

III/ 1) Calculer en $(u. a)$ l'aire \mathcal{A} de la partie du plan limitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 1$.

2) Calculer en $(u. a)$ l'aire \mathcal{A}' de la partie du plan limitée par les courbes (C) , (C') et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 1$.

EXERCICE 9:

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . (On prend comme unité graphique 1cm)

- 1) Etablir le tableau de variation de f .
- 2) a) Montrer que le point $I(0, 2)$ est un centre de symétrie de (C) .
b) Ecrire une équation de la tangente T à (C) au point I .
- 3) a) Vérifier que $(e^x + 1)^2 \geq 4e^x$. En déduire que $f'(x) \leq 1$
b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans \mathbb{R} et que $\alpha < 1$
- 4) Tracer $\Delta : y = x$, (C) et T .