Sujet n°1

EXERCICE 1 :

1) Mettre sous forme exponentielle chacun des complexes suivants :

$z_1 = \left(\sqrt{6} - i\sqrt{2}\right)^4 . e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = -i.\frac{z_1}{\overline{z_1}}$

2) Déterminer toutes les valeurs de n pour lesquelles $\left(cos\frac{\pi}{8} + i.sin\frac{\pi}{8}\right)^n \in i.IR$

EXERCICE 2 :

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A, B et C d'affixes respectifs a= $\sqrt{3} + i$, b= $i\sqrt{3} - 1$ et c=a+b.

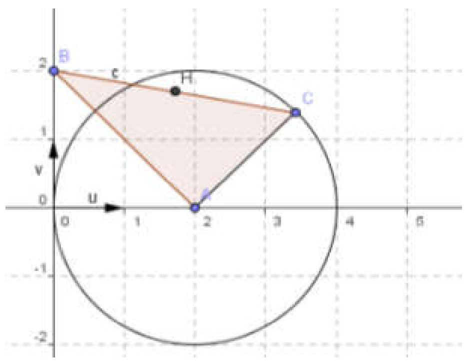
1) a) Montrer que les points A et B appartiennent à un même cercle $\mathcal{C}$ de centre O dont on précisera le rayon.
   b) Construire alors les points A, B et C.
2) Ecrire chacun des complexes a et b sous forme exponentielle.
3) a) Montrer que OACB est un carré.
   b) En déduire la forme exponentielle de c.
   c) Calculer alors $cos\frac{5\pi}{12}$ et $sin\frac{5\pi}{12}$
4) a) Déterminer les racines cubiques c_0, c_1 et c_2 du nombre complexe c.
   b) Montrer que $c_0 + c_1 + c_2 = 0$

EXERCICE 3 :

I/ On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2(1+i)z + 4i = 0$

1) a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure notée z_1
   b) En déduire l'autre solution qu'on notera z_2.
2) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $i.\overline{z}^4 - 2(1+i)\left(e^{i\frac{\pi}{8}}\overline{z}\right)^2 + 4i = 0$

II/ Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé (O,$\vec{u}, \vec{v}$). Soit les points A et B d'affixes respectifs z_A =2 et z_B =2i.
On désigne par $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon 2. Soit le point C du cercle $\mathcal{C}$ d'affixe z_C tel que le triangle ABC soit rectangle en A.
Le point H étant le milieu de [BC].



1) a) Déterminer graphiquement $|z_C - z_A|$ et $\arg(z_C - z_A)$

b) En déduire que $z_C = 2\left(1 + e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$

c) Donner alors la forme exponentielle de z_C.

2) Montrer que $z_H = (1 + \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}$ puis calculer OH.

3) Soit le point M du plan d'affixe $z_M = 2 + 2e^{i\theta}$ où $\theta \in [0, \pi]$

a) Déterminer l'ensemble des points M du plan quand θ décrit $[0, \pi]$.

b) Déterminer la valeur de θ pour laquelle (AM)⊥(OC)

EXERCICE 4 :

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit les points A(1) et B$(-2i)$. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M(z) dans chacun des cas suivants :

1) $|iz - 2| = |\overline{z} - 1|$ 2) $\left|\frac{z+2i}{z-1}\right| = 1$ 3) $\frac{z+2i}{z-1} < 0$ 4) $\frac{iz-2}{z-1} \in IR$

5) $arg\left(\frac{z+2i}{z-1}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ 6) $\overline{z} = 2i + 3e^{i2\theta}$ tel que θ décrit $[0, \pi]$

EXERCICE 5 :

On considère la fonction f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$ par : $f(x) = -ln(1 - tanx)$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$

2) Dresser le tableau de variation de f puis tracer la courbe (C).

3) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[0, +\infty[$.

b) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que pour tout $x \geq 0$ on a : $(f^{-1})'(x) = \frac{e^x}{2e^{2x} - 2e^x + 1}$

4) a) Montrer que pour tout $n \in IN$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution $\alpha_n \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$.

b) Montrer que la suite (α_n) est croissante et qu'elle est convergente.

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$