$EXERCICE\ N°\ 1$:

$1/$ *Soit l'équation* (E) : $z^2 - i\sqrt{3}z - 1 = 0$.

$a/$ *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* (E) .

$b/$ *Ecrire les solutions sous forme exponentielle.*

$2/$*Soit* $z \in \mathbb{C}$.*Soit le polynôme* P *tel que* : $P(z) = 3z^4 - 7i\sqrt{3}z^3 - 18\,z^2 + 7i\sqrt{3}z + 3$.

$a/$ *Calculer* $P(i\ \sqrt{3})$ **et vérifier que :** $P(\ e^{i\frac{\pi}{3}})$ **.**

b/ Montrer que : $z^4.P\left(\frac{-1}{z}\right) = P(z)$.

c/ En déduire que : $\frac{\sqrt{3}}{3}\ e^{i\frac{\pi}{2}}$ **et** $e^{i\frac{-4\pi}{3}}$ **sont des solutions de** $P(z) = 0$.

3/Le plan étant muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ **, on considère les points :**

$A\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$ **,** $B\left(3e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$, $C\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)$**et D tel que :** $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$.

a/Calculer l'affixe de D sous forme algébrique.

b/ Placer les points A , B , C et D.

c/ Soit Δ la droite parallèle à (BD) passant par A .

Δ coupe (OD) en E . Calculer l'affixe de E .

$EXERCICE\ N°\ 2$:

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ **.**

Soit (P) le plan d'équation 3*x* + *y* – *z* – 1 = 0 et (D) la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = -t+1 \\ y = 2t \\ z = -t+2 \end{cases}$ **où *t* désigne un nombre réel.**

1. a. Le point *C*(1 ; 3 ; 2) appartient-il au plan (P) ? Justifier.

b. Démontrer que la droite (D) est incluse dans le plan (P).

2. Soit (Q) le plan passant par le point *C* et orthogonal à la droite (D).

a. Déterminer une équation cartésienne du plan (Q).

b. Calculer les coordonnées du point *I*, point d'intersection du plan (Q) et de la droite (D).

c. Montrer que $CI = \sqrt{3}$ **.**

3. Soit *t* un nombre réel et M_t **le point de la droite (D) de coordonnées (– *t* + 1 ; 2*t* ; – *t* + 2).**

a. Vérifier que pour tout nombre réel *t* , $CM_t^2 = 6t^2 - 12t + 9$ **.**

b. Montrer que *CI* est la valeur minimale de *CM*$_t$ lorsque *t* décrit l'ensemble des nombres réels.

$EXERCICE\ N°\ 3$:

Partie A

Soit *u* la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ **par** $u(x) = x^2 - 2 + \ln x$ **.**

1. Étudier les variations de *u* sur $]0\,;+\infty[$ **et préciser ses limites en 0 et en** $+\infty$ **.**

2. a. Montrer que l'équation $u(x) = 0$ **admet une solution unique sur** $]0\,;+\infty[$ **. On note** α **cette solution.**

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} **de** α **.**

3. Déterminer le signe de $u(x)$ **suivant les valeurs de *x*.**

4. Montrer l'égalité : $\ln\alpha = 2 - \alpha^2$ **.**

Partie B

On considère la fonction *f* définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ **par** $f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$ **.**

On note f' **la fonction dérivée de *f* sur** $]0\,;+\infty[$ **.**

1. Exprimer, pour tout *x* de $]0\,;+\infty[$ **,** $f'(x)$ **en fonction de** $u(x)$ **.**

2. En déduire les variations de *f* sur $]0\,;+\infty[$ **.**

Partie C

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ **on note :**

- ***** Γ **la courbe représentative de la fonction ln (logarithme népérien) ;**
- *** *A* le point de coordonnées (0 ; 2) ;**
- *** *M* le point de** Γ **d'abscisse *x*, *x* appartenant à** $]0\,;+\infty[$ **.**

1. Montrer que la distance *AM* est donnée par $AM = \sqrt{f(x)}$ **.**

2. Soit *g* la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ **par** $g(x) = \sqrt{f(x)}$ **.**

a. Montrer que les fonctions *f* et *g* ont les mêmes variations sur $]0\,;+\infty[$ **.**

b. Montrer que la distance *AM* est minimale en un point de Γ **, noté *P*, dont on précisera les coordonnées.**