

EXERCICE N°1 : (4 points)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.

U_1 contient k boules blanches (k entier naturel supérieur ou égal à 1) et 3 boules noires.

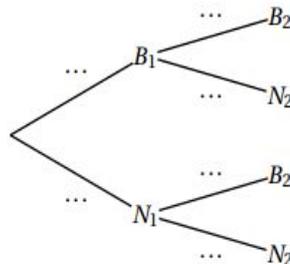
U_2 contient 2 boules blanches et une boule noire.

On tire une boule au hasard dans U_1 et on la place dans U_2 . On tire ensuite, au hasard, une boule dans U_2 . L'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

On note B_1 (respectivement N_1) l'événement « on a tiré une boule blanche (resp. noire) dans l'urne U_1 ».

On note B_2 (respectivement N_2) l'événement « on a tiré une boule blanche (resp. noire) dans l'urne U_2 ».

1. a. Recopier et compléter par les probabilités manquantes l'arbre ci-dessous :



Montrer que la probabilité de l'événement B_2 est égale à $\frac{3k+6}{4k+12}$.

Dans la suite on considère que $k = 12$.

Les questions 2 et 3 sont indépendantes l'une de l'autre et peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.

2. Un joueur mise 8 euros et effectue une épreuve.

Si, à la fin de l'épreuve, le joueur tire une boule blanche de la deuxième urne, le joueur reçoit 12 euros.

Sinon, il ne reçoit rien et perd sa mise. Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur, c'est-à-dire la différence entre la somme reçue et la mise.

- Montrer que les valeurs possibles de X sont 4 et -8 .
- Déterminer la loi de probabilité de la variable X .
- Calculer l'espérance mathématique de X .
- Le jeu est-il favorable au joueur?

3. Un joueur participe n fois de suite à ce jeu.

Au début de chaque épreuve, l'urne U_1 contient 12 boules blanches et 3 noires, et l'urne U_2 contient 2 boules blanches et 1 noire.

Ainsi, les épreuves successives sont indépendantes.

Déterminer le plus petit entier n pour que la probabilité de réaliser au moins une fois l'événement B_2 soit supérieure ou égale à 0,99.

EXERCICE N°2 : (6points)

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n \end{cases}$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4 .
2.
 - a. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est strictement positif.
 - b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
 - c. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?
3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose
$$v_n = \frac{u_n}{n}.$$
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme v_1 .
 - b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,
$$u_n = \frac{n}{2^n}.$$
4. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$ par $f(x) = \ln x - x \ln 2$.
 - a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
 - b. En déduire la limite de la suite (u_n) .

EXERCICE N°03 : (4points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points

A $(1, 1, 1)$; B $(-1, 0, -5)$ et C tels que $\overline{AB} \wedge \overline{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

1°) a° / Vérifier que les coordonnées de C est $(0, 1, -1)$

b° / Montrer que A, B et C forment un plan P d'équation : $2x + 2y - z - 3 = 0$

2°) On donne D $(2, 2, 2)$

a° / Montrer que l'aire de triangle ABC est $\frac{3}{2}$

b° / Déterminer le volume de tétraèdre ABCD

c° / En déduire la distance entre D et le plan P

3°) Soit $S = \left\{ M(x, y, z) \text{ tel que : } x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 3y + z + \frac{1}{2} = 0 \right\}$

a° / Montrer que S est une sphère de centre I $(-1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ et de rayon $\sqrt{3}$

b° / Montrer S et P se coupent suivant un cercle ξ dont on déterminera le rayon

c° / Déterminer la représentation paramétrique de la droite Δ passant par I et perpendiculaire à P

d° / En déduire les coordonnées de point H centre de cercle ξ

EXERCICE N°04 : (6 points)

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln x.$$

1. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
2. Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$. Donner une valeur approchée de α , arrondie au centième.
3. En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2}.$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans le plan, muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Démontrer que la courbe \mathcal{C} admet pour asymptote oblique la droite Δ d'équation $y = 2x$. Étudier la position relative de la courbe \mathcal{C} et de la droite Δ .
3. Justifier que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.
4. En déduire le tableau de variations de la fonction f .
5. Tracer la courbe \mathcal{C} et la droite Δ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On prendra comme unités : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie C

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine \mathcal{D} du plan compris entre la courbe \mathcal{C} , la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$.

1. Justifier que cette aire, exprimée en cm^2 , est donnée par :

$$I_n = 2 \int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

2. (a) Calculer l'intégrale $\int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx$ à l'aide d'une intégration par parties.
(b) En déduire l'expression de I_n en fonction de n .
3. Calculer la limite de l'aire I_n du domaine \mathcal{D} quand n tend vers $+\infty$.

