

EXERCICE N°1 : (4 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère :

- les points $A(1 ; 1 ; 1)$ et $B(3 ; 2 ; 0)$;
- le plan (P) passant par le point B et admettant le vecteur \vec{AB} pour vecteur normal ;
- le plan (Q) d'équation : $x - y + 2z + 4 = 0$;
- la sphère (S) de centre A et de rayon AB .

1. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (P) est : $2x + y - z - 8 = 0$

2. Déterminer une équation de la sphère (S) .

3. a) Calculer la distance du point A au plan (Q)
En déduire que le plan (Q) est tangent à la sphère (S) .

b) Le plan (P) est-il tangent à la sphère (S) ?

4. On admet que le projeté orthogonal de A sur le plan (Q) , noté C , a pour coordonnées $(0 ; 2 ; -1)$

a) Prouver que les plans (P) et (Q) sont sécants.

b) Soit (D) la droite d'intersection des plans (P) et (Q)

Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est :
$$\begin{cases} x = t \\ y = 12 - 5t \\ z = 4 - 3t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

c) Vérifier que le point A n'appartient pas à la droite (D)

d) On appelle (R) le plan défini par le point A et la droite (D) .
L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?

« Tout point du plan (R) est équidistant des points B et C »

Justifier votre réponse.

EXERCICE N°2 : (6points)

Partie 1 :

Un test de dépistage d'une maladie responsable à la disparition des lapins a fourni les renseignements suivantes :

- 70% des lapins sont malades.
- Si un lapin est malade, le test est positif dans 93% des cas.
- Si un lapin n'est pas malade, le test est positif dans 5% des cas.

On note : M : « le lapin est malade » et P : « le test est positif ».

- 1.) a. Donner l'arbre de probabilité qui modélise cette situation.
b. Déterminer la probabilité que le test est positif.
- 2.) Sachant que le test est positif, déterminer la probabilité qu'un lapin soit malade.
- 3.) On choisit au hasard 5 lapins. Déterminer la probabilité que 4 lapins ont un test négatif.

Partie 2 :

On suppose qu'un virus responsable à cette maladie a une durée de vie T exprimée en heures qui suit une loi exponentielle de paramètre λ .

La durée moyenne de vie d'un virus est donnée par $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx$.

- 1.) a. A l'aide d'une intégration par parties, Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$
b. Dans la suite, la durée moyenne de vie d'un virus étant de 100 heures.
Déterminer la probabilité que le virus persiste dans l'organisme du lapin plus que 4 jours.
c. Sachant que le virus a persisté plus que 4 jours, quelle est la probabilité qu'il persiste moins qu'une semaine.
- 2.) a. Déterminer, en heure, le temps t tel que $p(T \geq t) = p(T \leq t)$
b. Définir puis représenter la fonction de répartition de T.

EXERCICE N°03 : (4points)

Le tableau suivant donne la population d'une ville nouvelle entre les années 1985 et 2015.

Année	1985	1990	1995	2000	2005	2010	2015
Rang de l'année x	0	5	10	15	20	25	30
Population en milliers habitants y	18	21	25	30	36	42	50

- 1.) a. Calculer la moyenne \bar{X} et l'écart-type σ_X de la variable X .
 b. Calculer la moyenne \bar{Y} et l'écart-type σ_Y de la variable Y .
 c. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série double (X, Y) .
- 2.) a. Déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés.
 (Les coefficients seront arrondis au millième)
 b. Dédire de cet ajustement une estimation de la population en 2013, à un millier près.
- 3.) L'allure du nuage de la série double (X, Y) incite à chercher un ajustement par une fonction f définie sur $]0; +\infty[$ solution de l'équation différentielle $y' = 0,034y$ tels que $f(0) = 18$
 - a. Montrer $f(x) = 18e^{0,034x}$.
 - b. Dédire de cet ajustement une estimation de la population en 2013, à un millier près.
 - c. La population en 2013 était de 55 milliers. Lequel des deux ajustements vous semble plus pertinent ?
 Justifier votre choix
- d. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur $[0; 30]$; on donnera le résultat arrondi au dixième.
- e. Déterminer l'année au cours de laquelle la population atteint cette valeur moyenne.

EXERCICE N°04 : (6 points)

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.

Partie A :

On cherche à déterminer l'ensemble des fonctions f , définies et dérivables sur l'intervalle $]0; +\infty[$, vérifiant la condition (E) :

$$\text{pour tout nombre réel } x \text{ strictement positif, } xf'(x) - f(x) = x^2 e^{2x}.$$

- 1) Montrer que si une fonction f , définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$, vérifie la condition (E), alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ vérifie :
 pour tout nombre réel x strictement positif, $g'(x) = e^{2x}$.
- 2) En déduire l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur l'intervalle $]0; +\infty[$ qui vérifient la condition (E).
- 3) Quelle est la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ qui vérifie la condition (E) et qui s'annule en $\frac{1}{2}$?

Partie B :

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{e}{2}x$.

On désigne par c sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer, suivant les valeurs du nombre réel positif x , le signe de $h(x)$.

2) a) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x} dx$ et en déduire $\int_0^{\frac{1}{2}} h(x) dx$.

b) En déduire, en unité d'aire, la valeur exacte de l'aire de la partie du plan située en dessous de l'axe des abscisses et au dessus de la courbe c .