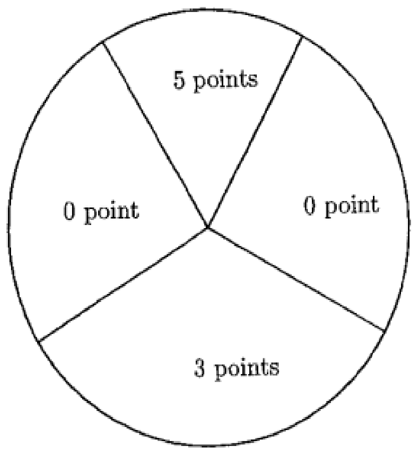
<u>EXERCICE N°1 :</u> (4 points)

Un jeu consiste à lancer des fléchettes sur une cible. La cible est partagée en quatre secteurs, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



On suppose que les lancers sont indépendants et que le joueur touche la cible à tous les coups.

1. Le joueur lance une fléchette.

   On note p_0 la probabilité d'obtenir 0 point.

   On note p_3 la probabilité d'obtenir 3 points.

   On note p_5 la probabilité d'obtenir 5 points.

   On a donc $p_0 + p_3 + p_5 = 1$. Sachant que $p_5 = \frac{1}{2}p_3$ et que $p_5 = \frac{1}{3}p_0$ déterminer les valeurs de p_0, p_3 et p_5.

2. Une partie de ce jeu consiste à lancer trois fléchettes au maximum. Le joueur gagne la partie s'il obtient un total (pour les 3 lancers) supérieur ou égal à 8 points. Si au bout de 2 lancers, il a un total supérieur ou égal à 8 points, il ne lance pas la troisième fléchette.

   On note G_2 l'événement : « le joueur gagne la partie en 2 lancers ».

On note G_3 l'événement : « le joueur gagne la partie en 3 lancers ».

On note P l'événement : « le joueur perd la partie ».

On note $p(A)$ la probabilité d'un événement A.

(a) Montrer, en utilisant un arbre pondéré, que $p(G_2) = \frac{5}{36}$.

On admettra dans la suite que $p(G_3) = \frac{7}{36}$.

(b) En déduire $p(P)$.

3. Un joueur joue six parties avec les règles données à la question 2.
Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins une partie ?

4. Pour une partie, la mise est fixée à 2 €.
Si le joueur gagne en deux lancers, il reçoit 5 €. S'il gagne en trois lancers, il reçoit 3 €. S'il perd, il ne reçoit rien.
On note X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur pour une partie. Les valeurs possibles pour X sont donc : -2, 1 et 3.

(a) Donner la loi de probabilité de X.

(b) Déterminer l'espérance mathématique de X. Le jeu est-il favorable au joueur ?

<u>EXERCICE N°2 :</u> (6poitns)

Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité 2cm, on considère les points M d'affixe z, M_1 d'affixe $\overline{z}$, A d'affixe 2 et B d'affixe 1.
Soit f l'application de $\mathscr{P}$ privé de A dans $\mathscr{P}$, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{\overline{z}+4}{\overline{z}-2}.$$

1. Déterminer les points invariants par f.
2. Soit C le point d'affixe $2\left(1+i\sqrt{3}\right)$.
Montrer que C' est le milieu du segment $[OC]$.
3. a. Calculer pour tout $z \neq 2$, le produit $\left(\overline{z}-2\right)\left(z'-1\right)$.

   b. En déduire :
   - la valeur de $AM_1 \cdot BM'$;
   - une expression de $\left(\vec{u} ; \overrightarrow{BM'}\right)$ en fonction de $\left(\vec{u} ; \overrightarrow{AM_1}\right)$.

   c. Justifier les relations :

$$\begin{array}{ll} (1) & AM \cdot BM' = 6 \\ (2) & \left(\vec{u} ; \overrightarrow{BM'}\right) = \left(\vec{u} ; \overrightarrow{AM}\right). \end{array}$$

   d. Application : construire l'image D' du point D d'affixe $2+2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

<u>EXERCICE N°03 :</u> (4poitns)

Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=x-x\ln x$.

1) Déterminer les limites de la fonction g en 0 et $+\infty$.

2) Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et que $g'(x)=-\ln x$.

3) Dresser le tableau de variations de la fonction g.

<u>PARTIE B</u>

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, par $u_n=\dfrac{e^n}{n^n}$.

a) le sens de variation de la suite (u_n).

b) la limite éventuelle de la suite (u_n).

2) Soit (v_n) la suite définie pour tout $n\in\mathbf{N}^*$ par $v_n=\ln(u_n)$.

a) Montrer que $v_n=n-n\ln n$.

b) En utilisant la **PARTIE A**, déterminer le sens de variation de la suite (v_n).

c) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

3) Montrer que la suite (u_n) est bornée.

4) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE N°04 : (6 points)

PARTIE A

On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
L'unité graphique est 1cm.

1) Étude des limites
   a) Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers 0.
   b) Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.
   c) Quelles conséquences peut-on déduire de ces deux résultats, pour la courbe $\mathscr{C}$?

2) Étude des variations de la fonction f
   a) Démontrer que, la fonction dérivée de la fonction f s'exprime, pour tout réel x strictement positif, par :

$$f'(x)=-\frac{1}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(2x+1)\ .$$

   b) Déterminer le signe de f' et en déduire le tableau de variation de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   c) Démontrer que l'équation $f(x)=2$ a une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$ et donner la valeur approchée de α arrondie au centième.

3) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

PARTIE B Étude d'une suite d'intégrales

Pour tout entier naturel $n\geq 2$, on considère l'intégrale I_n définie par : $I_n=\int_1^2 \frac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}}dx$.

1) Calculer I_2.

2) Une relation de récurrence
   a) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n\geq 2$:

$$I_{n+1}=\mathrm{e}-\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2^{n-1}}+(1-n)I_n\,.$$

   b) Calculer I_3.

3) Étude de la limite de la suite de terme général I_n
   a) Établir que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[1\,;2]$, on a : $0\leq\frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\leq\frac{\mathrm{e}}{x^n}$.
   b) En déduire un encadrement de I_n, puis étudier la limite éventuelle de la suite (I_n).