

**EXERCICE N°1 : (4 points )**

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

- On considère l'équation  $(E): z^2 - 6z + c = 0$  où  $c$  est un réel strictement supérieur à 9.
  - Justifier que  $(E)$  admet deux solutions complexes non réelles.
  - Justifier que les solutions de  $(E)$  sont  $z_A = 3 + i\sqrt{c-9}$  et  $z_B = 3 - i\sqrt{c-9}$ .
- On note  $A$  et  $B$  les points d'affixes respectives  $z_A$  et  $z_B$ .  
Justifier que le triangle  $OAB$  est isocèle en  $O$ .
- Démontrer qu'il existe une valeur du réel  $c$  pour laquelle le triangle  $OAB$  est rectangle et déterminer cette valeur.

**EXERCICE N°2 : (6 points)**

Les valeurs approchées des résultats seront données à  $10^{-4}$  près.

Les parties A et B sont indépendantes.

**Partie A**

Un fabricant d'ampoules possède deux machines, notées A et B. La machine A fournit 65 % de la production, et la machine B fournit le reste. Certaines ampoules présentent un défaut de fabrication :

- à la sortie de la machine A, 8 % des ampoules présentent un défaut ;
- à la sortie de la machine B, 5 % des ampoules présentent un défaut.

On définit les événements suivants :

- A « l'ampoule provient de la machine A » ;
- B « l'ampoule provient de la machine B » ;
- D « l'ampoule présente un défaut ».

- On prélève une ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.
  - Construire un arbre pondéré représentant la situation.
  - Montrer que la probabilité de tirer une ampoule sans défaut est égale à 0,9305.
  - L'ampoule tirée est sans défaut.  
Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine A.

2. On prélève 10 ampoules au hasard parmi la production d'une journée à la sortie de la machine A. La taille du stock permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise.  
Calculer la probabilité d'obtenir au moins 9 ampoules sans défaut.

### Partie B

1. On rappelle que si  $T$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  ( $\lambda$  étant un réel strictement positif) alors pour tout réel positif  $a$ ,  $P(T \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx$ .
- Montrer que  $P(T \geq a) = e^{-\lambda a}$ .
  - Montrer que si  $T$  suit une loi exponentielle alors pour tous réels positifs  $t$  et  $a$  on a

$$P_{T \geq t}(T \geq t + a) = P(T \geq a).$$

2. Dans cette partie la durée de vie en heures d'une ampoule sans défaut est une variable aléatoire  $T$  qui suit la loi exponentielle d'espérance 10 000.
- Déterminer la valeur exacte du paramètre  $\lambda$  de cette loi.
  - Calculer la probabilité  $P(T \geq 5\,000)$ .
  - Sachant qu'une ampoule sans défaut a déjà fonctionné pendant 7 000 heures, calculer la probabilité que sa durée de vie totale dépasse 12 000 heures.

### Partie C

L'entreprise a cherché à améliorer la qualité de sa production et affirme qu'il n'y a pas plus de 6 % d'ampoules défectueuses dans sa production. Une association de consommateurs réalise un test sur un échantillon et obtient 71 ampoules défectueuses sur 1 000.

- Dans le cas où il y aurait exactement 6 % d'ampoules défectueuses, déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence d'ampoules défectueuses sur un échantillon aléatoire de taille 1 000.
- A-t-on des raisons de remettre en cause l'affirmation de l'entreprise ?

### EXERCICE N°03 : (4points)

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = \frac{1}{2}$  et telle que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$ .

1. a. Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .  
b. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 < u_n$ .
2. On admet que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n < 1$ .  
a. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.  
b. Démontrer que la suite  $(u_n)$  converge.
3. Soit  $(v_n)$  la suite définie, pour tout entier naturel  $n$ , par  $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$ .  
a. Montrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 3.  
b. Exprimer pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n$  en fonction de  $n$ .  
c. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$ .  
d. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

### EXERCICE N°04 : (6 points)

#### Partie A

On considère la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  par  $f(x) = xe^{1-x^2}$ .

1. Calculer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .

*Indication : on pourra utiliser que pour tout réel  $x$  différent de 0,  $f(x) = \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$ .*

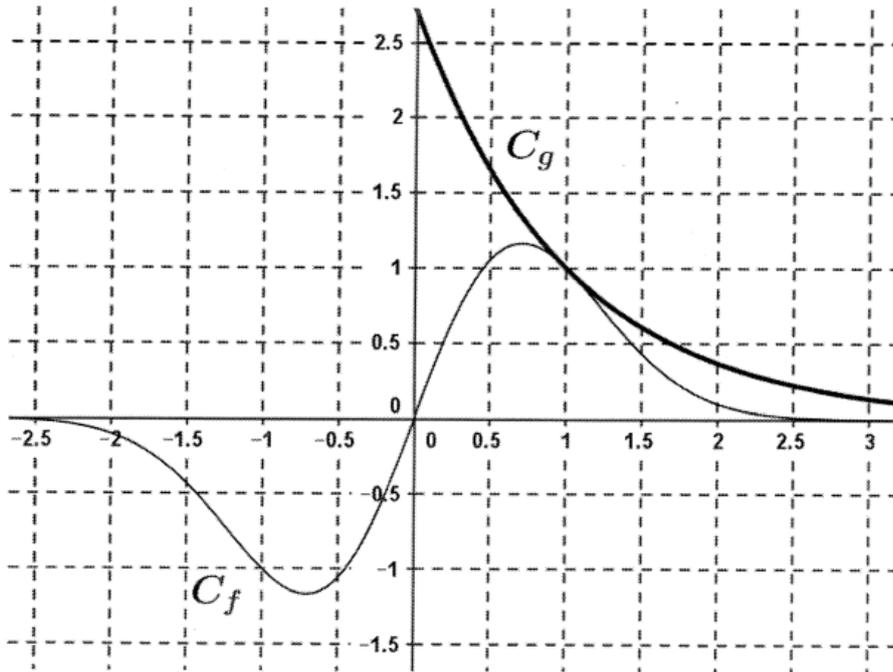
On admettra que la limite de la fonction  $f$  en  $-\infty$  est égale à 0.

2. a. On admet que  $f$  est dérivable sur  $\mathbf{R}$  et on note  $f'$  sa dérivée.  
Démontrer que pour tout réel  $x$ ,  
$$f'(x) = (1 - 2x^2)e^{1-x^2}$$
.  
b. En déduire le tableau de variations de la fonction  $f$ .

#### Partie B

On considère la fonction  $g$  définie pour tout réel  $x$  par  $g(x) = e^{1-x}$ .

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère du plan les courbes représentatives  $C_f$  et  $C_g$  respectivement des fonctions  $f$  et  $g$ .



Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.

1. Après observation du graphique, quelle conjecture peut-on émettre ?
2. Justifier que, pour tout réel  $x$  appartenant à  $] -\infty ; 0]$ ,  $f(x) < g(x)$ .
3. Dans cette question, on se place dans l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

On pose, pour tout réel  $x$  strictement positif,  $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$ .

- a. Montrer que, pour tout réel  $x$  strictement positif,

$$f(x) \leq g(x) \text{ équivaut à } \Phi(x) \leq 0.$$

On admet pour la suite que  $f(x) = g(x)$  équivaut à  $\Phi(x) = 0$ .

- b. On admet que la fonction  $\Phi$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ . Dresser le tableau de variations de la fonction  $\Phi$ . (Les limites en 0 et  $+\infty$  ne sont pas attendues.)
  - c. En déduire que, pour tout réel  $x$  strictement positif,  $\Phi(x) \leq 0$ .
4.
    - a. La conjecture émise à la question 1. de la partie B est-elle valide ?
    - b. Montrer que  $C_f$  et  $C_g$  ont un unique point commun, noté A.
    - c. Montrer qu'en ce point A, ces deux courbes ont la même tangente.

### Partie C

1. Trouver une primitive  $F$  de la fonction  $f$  sur  $\mathbf{R}$ .
2. En déduire la valeur de  $\int_0^1 (e^{1-x} - xe^{1-x^2}) dx$ .
3. Interpréter graphiquement ce résultat.