REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTREDE L'EDUCATION ®®®®®®® ENS : MAB / SALAH Num : 22427502	Epreuve : Mathématiques	
	Section : SCIENCES ET ECH	
	SERIE n° :2	DURE : 3H
	Chapitre n°1 : SERIE DE REVISION2	

<u>EXERCICE N°1 :</u> (4 points)

On se place dans le plan complexe rapporté au repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Soit f la transformation qui à tout nombre complexe z non nul associe le nombre complexe $f(z)$ défini par :

$$f(z) = z + \frac{1}{z}$$

On note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $f(z)$.

1. On appelle A le point d'affixe $a = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   a. Déterminer la forme exponentielle de a.
   b. Déterminer la forme algébrique de $f(a)$.
2. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $f(z) = 1$.
3. Soit M un point d'affixe z du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.
   a. Justifier que l'affixe z peut s'écrire sous la forme $z = e^{i\theta}$ avec θ un nombre réel.
   b. Montrer que $f(z)$ est un nombre réel.
4. Décrire et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un nombre réel.

<u>EXERCICE N°2 :</u> (6poitns)

Les parties A, B *et* C *peuvent être traitées de façon indépendante.*

Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au millième.

La chocolaterie « Choc'o » fabrique des tablettes de chocolat noir, de 100 grammes, dont la teneur en cacao annoncée est de 85 %.

Partie A

À l'issue de la fabrication, la chocolaterie considère que certaines tablettes ne sont pas commercialisables : tablettes cassées, mal emballées, mal calibrées, etc.

La chocolaterie dispose de deux chaînes de fabrication :

- la chaîne A, lente, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est égale à 0,98.
- la chaîne B, rapide, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est 0,95.

À la fin d'une journée de fabrication, on prélève au hasard une tablette et on note :

A l'évènement : « la tablette de chocolat provient de la chaîne de fabrication A » ;
C l'évènement : « la tablette de chocolat est commercialisable ».

On note x la probabilité qu'une tablette de chocolat provienne de la chaîne A.

1. Montrer que $P(C) = 0{,}03x + 0{,}95$.
2. À l'issue de la production, on constate que 96 % des tablettes sont commercialisables et on retient cette valeur pour modéliser la probabilité qu'une tablette soit commercialisable. Justifier que la probabilité que la tablette provienne de la chaîne B est deux fois égale à celle que la tablette provienne de la chaîne A.

Partie B

Une machine électronique mesure la teneur en cacao d'une tablette de chocolat. Sa durée de vie, en années, peut être modélisée par une variable aléatoire Z suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

1. La durée de vie moyenne de ce type de machine est de 5 ans.
   Déterminer le paramètre λ de la loi exponentielle.
2. Calculer $P(Z > 2)$.
3. Sachant que la machine de l'atelier a déjà fonctionné pendant 3 ans, quelle est la probabilité que sa durée de vie dépasse 5 ans ?

On note X la variable aléatoire donnant la teneur en cacao, exprimée en pourcentage, d'une tablette de 100g de chocolat commercialisable. On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 85$ et d'écart type $\sigma = 2$.

1. Calculer $P(83 \leqslant X \leqslant 87)$.
   Quelle est la probabilité que la teneur en cacao soit différente de plus de 2 % du pourcentage annoncé sur l'emballage ?
2. Déterminer une valeur approchée au centième du réel a tel que :
   $P(85 - a \leqslant X \leqslant 85 + a) = 0{,}9$.
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

3. La chocolaterie vend un lot de 10 000 tablettes de chocolat à une enseigne de la grande distribution. Elle affirme au responsable achat de l'enseigne que, dans ce lot, 90 % des tablettes ont un pourcentage de cacao appartenant à l'intervalle $[81,7 \; ; \; 88,3]$.

Afin de vérifier si cette affirmation n'est pas mensongère, le responsable achat fait prélever 550 tablettes au hasard dans le lot et constate que, sur cet échantillon, 80 ne répondent pas au critère.

Au vu de l'échantillon prélevé, que peut-on conclure quant à l'affirmation de la chocolaterie ?

<u>EXERCICE N°03 :</u> (4poitns)

L'espace étant muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit les points A(3,2,6) ; B(1,2,4) et C(4,-2,5).

1) a) Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) En déduire que les points A , B et C déterminent un plan qu'on notera P.

c) Montrer qu'une équation du plan P est $2x+y-2z+4=0$.

2) a) Vérifier que les points O, A, B et C ne sont pas coplanaires.

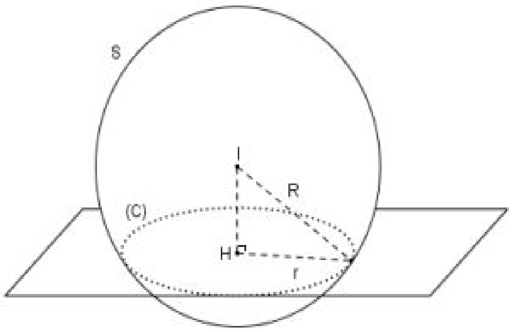
b) Calculer le volume du tétraèdre OABC, puis sa hauteur issue de O.

3) Soit (S) l'ensemble des points M(x,y,z) de l'espace tels que :

$x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z=6$

a) Montrer que (S) est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R.

b) Montrer que le plan P coupe la sphère (S) suivant un cercle (C) dont on précisera le centre H et le rayon r.



4) Soit les points E(0,3,-1) , F(4,1,1) et G(-2,1,1).

a) Montrer que [FG] est un diamètre de S.

b) Vérifier que $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EG}=0$.

c) Déterminer une équation cartésienne du plan T passant par E et tangent à S.

EXERCICE N°04 : (6 points)

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

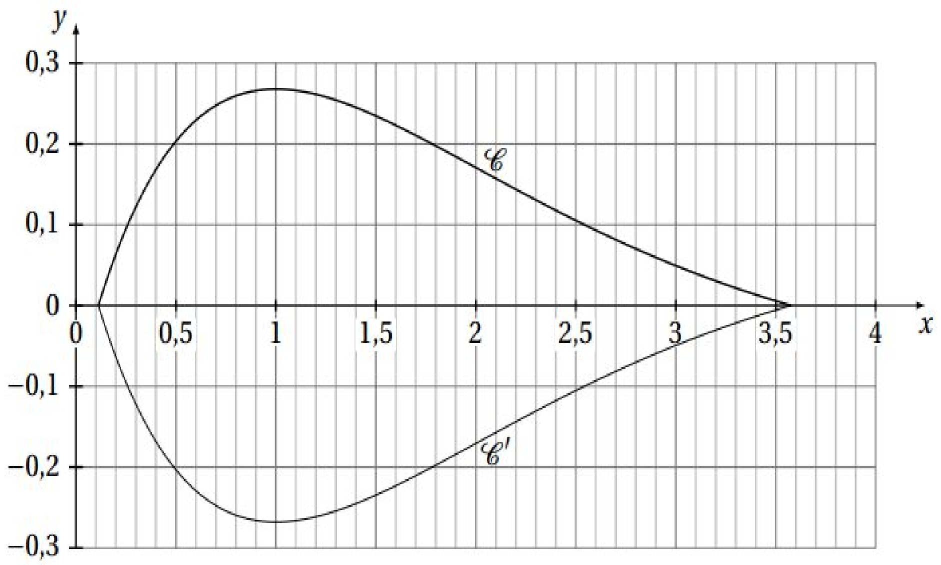
$$f(x) = xe^{-x} - 0,1$$

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$ et dresser son tableau de variations.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

On admet l'existence du nombre réel strictement positif β tel que $\alpha < \beta$ et $f(\beta) = 0$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[\alpha\,;\,\beta]$ dans un repère orthogonal et $\mathscr{C}'$ la courbe symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.

L'unité sur chaque axe représente 5 mètres.

Ces courbes sont utilisées pour délimiter un massif floral en forme de flamme de bougie sur lequel seront plantées des tulipes.



4. Démontrer que la fonction F, définie sur l'intervalle $[\alpha\ ;\ \beta]$ par

$$F(x) = -(x+1)e^{-x} - 0{,}1x$$

est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[\alpha\ ;\ \beta]$.

5. Calculer, en unités d'aire, une valeur arrondie à 0,01 près de l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

   On utilisera les valeurs arrondies à 0,001 près suivantes : $\alpha \approx 0{,}112$ et $\beta \approx 3{,}577$.

6. Sachant que l'on peut disposer 36 plants de tulipes par mètre carré, calculer le nombre de plants de tulipes nécessaire à la réalisation de ce massif.