Exercice 1 SP 2012 ☺

Dans l'annexe ci-jointe $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.

C_f est la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbf{R}_+$ par

$$f(x) = -\frac{x^2 + x\ln x + x}{(x+1)^2} \quad \text{pour } x > 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

Le réel α est l'abscisse du point d'intersection de la courbe C_f avec l'axe des absciss autre que le point O.

1) a/ Par lecture graphique, donner le signe de $f(x)$.

   b/ Montrer que $\ln\alpha = -(\alpha+1)$.

2) On considère la fonction g définie sur $[\alpha, +\infty[$ par $g(x) = \frac{x\ln x}{x+1} + 1$

   et on désigne par C_g la courbe représentative de g dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

   Montrer que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et que $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 0.$

3) a/ Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[\alpha, +\infty[$, $g'(x) = -\frac{f(x)}{x}.$

   b/ Dresser le tableau de variation de g.

4) a/ Montrer que $g(\alpha) = 1 - \alpha.$

   b/ Construire alors, sur l'annexe, le point de la courbe C_g d'abscisse α .

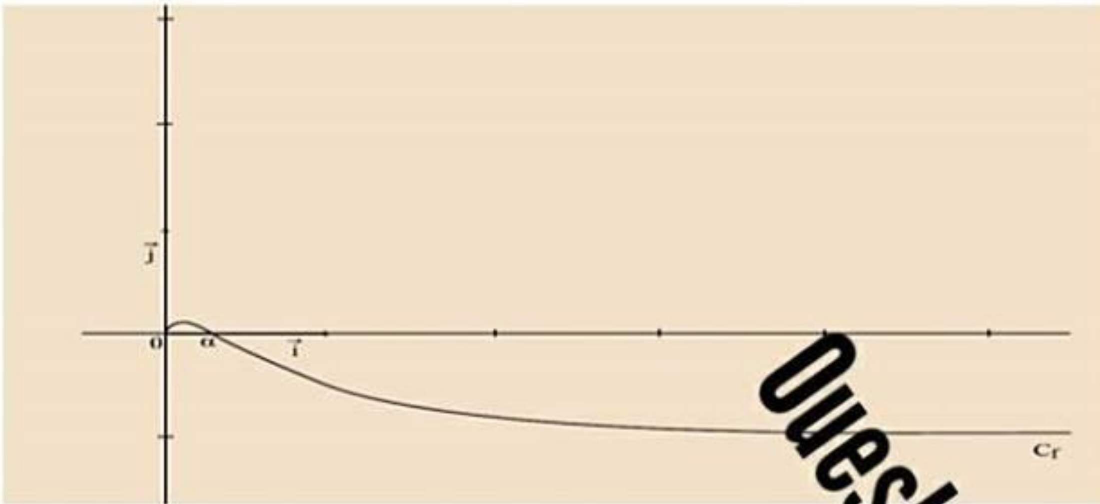
   c/ Tracer la courbe C_g.

5) On désigne par **A** l'aire (en unité d'aire) de la partie du plan limitée par les courbes C_g , C_f et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$.

   a) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que

   $$\int_\alpha^1 f(x)dx = -\left[xg(x)\right]_\alpha^1 + \int_\alpha^1 g(x)dx.$$

   b/ En déduire que $\mathbf{A} = \alpha^2 - \alpha + 1.$



Correction 😊

1) a) Signe de $f(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

b) $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\alpha^2+\alpha\ln(\alpha)+\alpha}{(\alpha+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha = -(\alpha+1)$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x+1}.\ln x + 1\right) = +\infty$, $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)=1\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x+1} + \frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x+1}.\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right) = 0$

3) a) $g'(x) = -\frac{f(x)}{x}$

b)

x	α		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	
$g(x)$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4) a) $g(\alpha) = \frac{\alpha \ln \alpha}{\alpha+1} + 1 = -\frac{\alpha(\alpha+1)}{\alpha+1} = 1 - \alpha$

b) voir figure 2

c) voir figure 2

5) a) $\int_{\alpha}^{1} f(x)dx = \int_{\alpha}^{1} -xg(x)$

On pose $u(x) = -x \quad \rightarrow \quad u'(x) = -1$

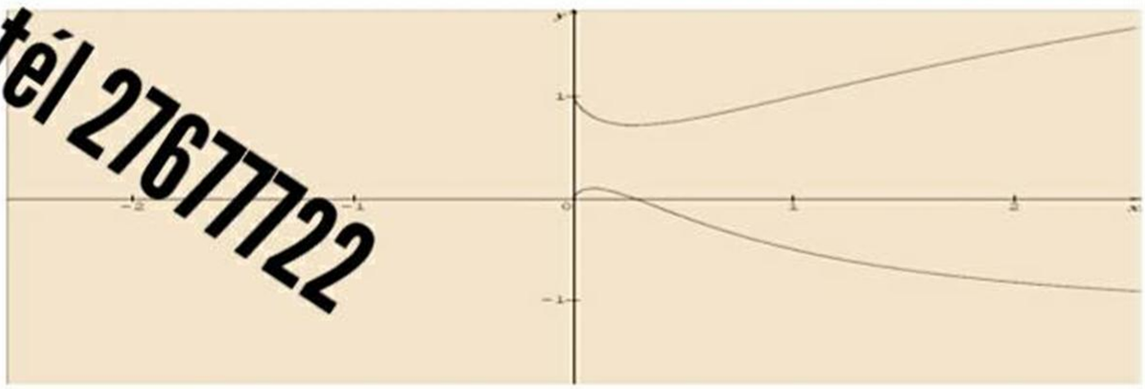
$v'(x) = g'(x) \quad \rightarrow \quad v(x) = g(x)$

Alors $\int_{\alpha}^{1} f(x)dx = -[x.g(x)]_{\alpha}^{1} + \int_{\alpha}^{1} g(x)dx$

b) $\mathcal{A} = \int_{\alpha}^{1} |f(x) - g(x)|dx \ (u.a) = \int_{\alpha}^{1} g|(x) - f(x)|dx \ (u.a) = \int_{\alpha}^{1} g(x)dx - \int_{\alpha}^{1} f(x)dx \ (u.a)$

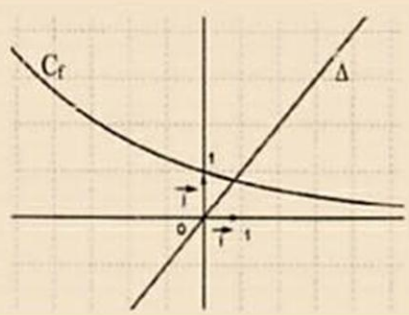
$= \int_{\alpha}^{1} g(x)dx - \left[-x.g(x)\right]_{\alpha}^{1} + \int_{\alpha}^{1} g(x)dx \ (u.a) = [x.g(x)]_{\alpha}^{1} = g(1) - \alpha g(\alpha)$

$\mathcal{A} = 1 - \alpha(1-\alpha) = \alpha^2 - \alpha + 1$



Exercice 2 SP 2011 😊

Dans la figure ci-contre on a représenté dans un repère orthonormé la courbe C_f de la fonction $f : x \mapsto e^{-\frac{x}{4}}$ ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.



1) a) Utiliser le graphique pour justifier que l'équation $e^{-\frac{x}{4}} = x$ admet dans [0, 1] une solution unique α.

b) Vérifier que $0.8 < \alpha < 0.9$.

2) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n)\ ;\ n \geq 0 \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq U_n \leq 1$.

b) Montrer que pour tout réel $x \in [0, 1]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

c) Montrer que pour tout entier naturel n, $|U_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{4}\ |U_n - \alpha|$.

d) En déduire que pour tout entier naturel n, $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

e) Montrer que la suite (U_n) est convergente vers α.

3) a) Déterminer un entier naturel n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, $|U_n - \alpha| < 10^{-3}$.

b) En déduire une valeur approchée de α à 10^{-3} près .

Correction

1) $f(x) = e^{-\frac{x}{4}}$, $\Delta : y = x$

a / C_f coupe Δ eu point unique d'abscisse un réel de l'intervalle [0,1], donc l'équation $e^{-\frac{x}{4}} - x = 0$ admet dans [0,1] une solution unique α.

b / f(0.8)-0.8 = 0.0187307… > 0 et f(0.9)-0.9 = - 0.10148378 < 0 donc $0.8 < \alpha < 0.9$.

2) On pose : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n)\ ;\ n \geq 0 \end{cases}$

a / Montrons que pour tout n , $0 \le u_n \le 1$

♦ On a $u_0 = 1$ donc $0 \le u_0 \le 1$.

♦ Soit n un entier naturel, supposons que $0 \le u_n \le 1$ et démontrons que $0 \le u_{n+1} \le 1$

On a $0 \le u_n \le 1$ alors $f(1) \le f(u_n) \le f(0)$ (f est décroissante sur [0,1])

d'où $e^{-\frac{1}{4}} \le u_{n+1} \le 1$ par suite $0 \le u_{n+1} \le 1$

b / Montrons que pour tout réel $x \in [0,1]$, $f'(x) \le \frac{1}{4}$:

On a $f'(x) = -\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}$ alors $|f'(x)| = \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x} = \frac{1}{4}f(x)$

d'où pour x $\in [0,1]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{4} f(0)$ (car f est décroissante sur [0,1])

ainsi $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

c / Montrons que pour tout n, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$

On a : ◆ f est dérivable sur [0,1]

◆ Pour tout x $\in [0,1]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

Donc pour deux réels a et b dans [0,1] on a : $|f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{4}|b - a|$

En posant b $= u_n$ et a $= \alpha$ (*ce qui est légitime puisque* α *et* u_n *sont tous deux dans [0,1]*);

on obtient $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$

Ainsi $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$.

d / Démontrons que pour tout n, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

◆ Vérifions pour n = 0 :

On a : $|u_0 - \alpha| = |1 - \alpha| \leq 1 = \left(\frac{1}{4}\right)^0$ car u_0 et α appartiennent à [0,1].

◆Soit n un entier un entier naturel, supposons que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ et montrons que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$.

On a : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ alors $\frac{1}{4}|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

Or : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$ d'où $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

Ainsi pour tout n, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

e / Montrons que la suite u converge vers α :

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

3) a/ Déterminons un entier naturel n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$

$|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$ dès que $\left(\frac{1}{4}\right)^n \leq 10^{-3}$ signifie $\ln\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \leq \ln\left(10^{-3}\right)$

signifie $-n\ln(4) \leq -3\ln(10)$ signifie $n \geq \dfrac{3\ln(10)}{\ln(4)}$ signifie n $\geq$ 4.9828…

On prend donc n = 5.

Exercice 3 SP 2013

Dans l'annexe ci-jointe $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé et C_f est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[3, +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 9}\right)$.

Soit E la partie du plan limitée par la courbe C_f et les droites d'équations $x = 3$, $x = 5$ et $y = \ln 3$. On désigne par A l'aire (en unité d'aire) de E.

1) Hachurer E.

2) a) Vérifier que $f(5) = 2\ln 3$.

b) Soit M et N les points de la courbe C_f d'abscisses respectives 3 et 5 et P et Q les points de coordonnées respectives $(5, \ln 3)$ et $(3, 2\ln 3)$.

Placer, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les points M, N, P et Q.

c) Calculer l'aire du rectangle MPNQ et l'aire du triangle MPN.

d) En déduire que $\ln 3 \leq A \leq 2\ln 3$.

3) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) En utilisant le graphique, justifier que f réalise une bijection de $[3, +\infty[$ sur l'intervalle $[\ln 3, +\infty[$.

4) Soit g la fonction réciproque de la fonction f et C_g sa courbre représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Tracer la courbe C_g.

5) Soit E' la partie du plan limitée par la courbe C_g et les droites d'équations $x = \ln 3$, $x = 2\ln 3$ et $y = 5$. On désigne par A' l'aire (en unité d'aire) de E'.

a) Hachurer E'.

b) Montrer que $A' = 5\ln 3 - \int_{\ln 3}^{2\ln 3} g(x)\,dx$.

6) a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[\ln 3, +\infty[$, $g(x) = \dfrac{e^x + 9e^{-x}}{2}$.

b) Calculer $\int_{\ln 3}^{2\ln 3} g(x)\,dx$ et en déduire la valeur de A.

Exercice 3 SP 2013 ☺

1) Voir figure.

2) a) $f(5)=\ln\left(5+\sqrt{25-9}\right)=\ln(9)=\ln\left(3^2\right)=2\ln 3.$

b) Voir figure.

c) $A_{MPNQ}=MP\times PN=(5-3)\left(f(5)-\ln 3\right)=2(2\ln 3-\ln 3)=2\ln 3.$

$A_{MPN}=\dfrac{MP\times PN}{2}=\dfrac{2\ln 3}{2}=\ln 3.$

d) $A_{MPN}\le A\le A_{MPNQ}$ donc $\ln 3\le A\le 2\ln 3.$

3) a) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} x+\sqrt{x^2+9}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$

b) La fonction f est continue et strictement croissante sur $[3,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[3,+\infty[$ sur $f([3,+\infty[)=\left[f(3),\lim\limits_{+\infty} f\right[=[\ln 3,+\infty[.$

4) C_g est le symétrique de C_f par rapport à la droite $y=x$ (voir figure).

5) a) Voir figure.

b) On considère les points $M'(\ln 3,0)$, $Q'(2\ln 3,0)$, $N'(2\ln 3,5)$ et $P'(\ln 3,5)$ et on désigne par $A_{M'Q'N'P'}$ l'aire du rectangle M'Q'N'P' et par B l'aire de la partie du plan limitée par C_g, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=\ln 3$ et $x=2\ln 3$.

$A'=A_{M'Q'N'P'}-B.$ Or $A_{M'Q'N'P'}=M'P'\times M'Q'=5(2\ln 3-\ln 3)=5\ln 3$ et $B=\int_{\ln 3}^{2\ln 3} g(x)\,dx$, on en déduit que $A'=5\ln 3-\int_{\ln 3}^{2\ln 3} g(x)\,dx.$

6) a) Pour tout $x \in [\ln 3, +\infty[$ et $y \in [3, +\infty[$

$$g(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 9}\right) = x \Leftrightarrow y + \sqrt{y^2 - 9} = e^x \Leftrightarrow \sqrt{y^2 - 9} = e^x - y$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y^2 - 9} = e^x - y \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 9 = (e^x - y)^2 \\ e^x \geq y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 9 = e^{2x} - 2ye^x + y^2 \\ e^x \geq y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ye^x = e^{2x} + 9 \\ e^x \geq y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{e^{2x} + 9}{2e^x} \\ e^x \geq y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{e^x + 9e^{-x}}{2} \\ e^x \geq y \end{cases}$$. On en déduit que pour tout

$x \in [\ln 3, +\infty[$, $g(x) = \dfrac{e^x + 9e^{-x}}{2}$.

b) $\displaystyle\int_{\ln 3}^{2\ln 3} g(x)\,dx = \int_{\ln 3}^{2\ln 3} \frac{e^x + 9e^{-x}}{2}\,dx = \left[\frac{e^x - 9e^{-x}}{2}\right]_{\ln 3}^{2\ln 3} = 4$ donc $A' = (5\ln 3 - 4)$u.a et puisque E

et E' sont symétriques par rapport à la droite $y = x$, il en résulte que $A = A' = (5\ln 3 - 4)$u.a.