Limites et continuité

Séance 1

EXERCICE 1:

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{1-\sqrt{1-sinx}}{x}$

1) Montrer que pour tout $x \in IR^*$, on a : $f(x) = \frac{sinx}{x(1+\sqrt{1-sinx})}$

2) En déduire que f est prolongeable par continuité en 0.

EXERCICE 2:

Soit la fonction $f : \mathrm{x} \mapsto \frac{1-2\mathrm{x}\sin(3\mathrm{x})}{\mathrm{x}^2+1}$

Montrer que pour tout réel x< 0, on a : $\frac{2x+1}{\mathrm{x}^2+1} \leq f(\mathrm{x}) \leq \frac{1-2x}{\mathrm{x}^2+1}$. En déduire $\lim\limits_{\mathrm{x}\to-\infty} f(\mathrm{x})$

EXERCICE 3:

Soit f : $\mathrm{x} \mapsto \frac{1}{\mathrm{x}}.\sin\mathrm{x} + 2$; $\mathrm{x} \neq 0$

1) Montrer que pour tout x≠0 on a : $|\mathrm{f(x)} - 2| \leq \left|\frac{1}{\mathrm{x}}\right|$

2) En déduire $\lim\limits_{\mathrm{x}\to-\infty} \mathrm{f(x)}$

EXERCICE 4:

Soit les fonctions $f : \mathrm{x} \mapsto \frac{1}{\mathrm{x}}$ et $g : \mathrm{x} \mapsto \sqrt{\mathrm{x}+1}$

1) Calculer $f \circ g\ (3)$; $g \circ f\ (-2)$

2) Définir chacune des fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$.

3) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{\mathrm{x}\to0^+} g \circ f\ (\mathrm{x})$; $\lim\limits_{\mathrm{x}\to-\infty} g \circ f\ (\mathrm{x})$; $\lim\limits_{\mathrm{x}\to(-1)^+} f \circ g\ (\mathrm{x})$

EXERCICE 5:

Dans chacun des cas suivants, déterminer deux fonctions u et v telles que $f = u \circ v$:

a) $f(x) = \sin(\frac{\pi}{x} + 1)$ b) $f(x) = \frac{3\sqrt{\mathrm{x}}+1}{\sqrt{\mathrm{x}}-4}$ c) $f(x) = \sqrt{1+cosx}$ d) $f(x) = |x^2 - x^4|$

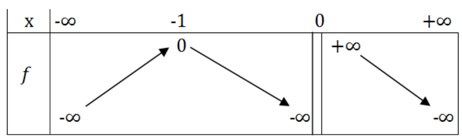
EXERCICE 6:

Soit les fonctions $f : \mathrm{x} \mapsto \frac{1}{\mathrm{x}-3}$ et $g : \mathrm{x} \mapsto \sqrt{\mathrm{x}+3}$

1) Montrer que la fonction gof est continue en 2.

2) Montrer que la fonction gof est continue sur $]3,+\infty[$.

EXERCICE 7:



Voici le tableau de variation d'une fonction f définie et continue sur IR\{0}.

1) Déterminer chacune des limites suivantes :

$\lim\limits_{\mathrm{x}\to-\infty} f(-1+\frac{1}{\mathrm{x}^2})$; $\lim\limits_{\mathrm{x}\to+\infty} f\ (\frac{1}{\mathrm{x}})$; $\lim\limits_{\mathrm{x}\to+\infty} f(\sqrt{\mathrm{x}})$; $\lim\limits_{\mathrm{x}\to-\infty} f(\ \mathrm{x}^3 + \frac{1}{\mathrm{x}+1})$; $\lim\limits_{\mathrm{x}\to0^+} \sqrt{1 - fof(x)}$ et $\lim\limits_{\mathrm{x}\to-1} \frac{1}{f(x)}$

2) Déterminer l'image par f de chacun des intervalles suivants :
$]-\infty,-1]$, $]-\infty, 0[$ et $]0,+\infty[$

3) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dans IR\{0}

b) En déduire le tableau signe de $f(x)$ pour tout $x \in$ IR \ {0}.

www.devoirat.net 2017

EXERCICE 8:

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\begin{cases} x^3+x+1 & \text{si } x\le 0 \\ 1+x\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & \text{si } x>0 \end{cases}$

1) a- Montrer que, pour tout $x>0$, $1-x\le f(x)\le 1+x$

   b- Etudier alors la continuité de f en 0

2) a- Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $]-\infty,0[$ une unique solution α

   b- Vérifier que $-0.7<\alpha<-0.6$

3) a- Montrer que la fonction h : $x\mapsto \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ est continue sur $]0,+\infty[$

   b- Montrer que la fonction f est continue sur IR.

EXERCICE 9:

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x)=\begin{cases} 1+\dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{si } x\in\,]-\infty,0[\\ 2x+\sqrt{x^2+\left(\dfrac{9}{4}\right)} & \text{si } x\in[0,+\infty[\end{cases}$

1) Montrer que pour tout $x<0$, on : $0\le f(x)-1\le\dfrac{2}{x^2}$. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) a- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-3x\right)$

   b- Etudier la continuité de f en 0

3) a- Justifier la continuité de f sur $[0,+\infty[$

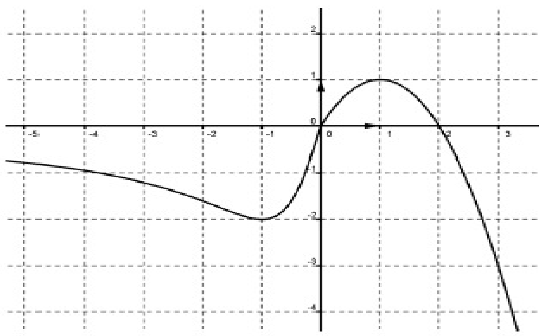
   b- Montrer que f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$. Déterminer $f\left([0,2]\right)$

   c- En déduire que l'équation $2f(x)-7=0$ admet une unique solution $\alpha\in[0,2]$.

EXERCICE 10:

C_f admet au voisinage de :

- **$-\infty$ une asymptote d'équation $y=0$.**
- **$+\infty$ une branche infinie parabolique de direction la droite d'équation $x=0$**



1) **Déterminer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$**
2) **Déterminer : $f(IR)$ et $f\circ f(IR)$**
3) ***a-* Déterminer graphiquement le domaine de définition de f, de $u=\dfrac{1}{f}$ et de $v=\sqrt{f}$.**

   ***b-* La fonction u est elle prolongeable par continuité en 2?**

4) **On considère la fonction $g: x\mapsto\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ et la fonction $h=g\circ f$**

   $a-$ Montrer que h est continue sur $]2,+\infty[$.

   $b-$ Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ et $h(3)$.

5) **Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $k(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\ge 0 \\ x^2\left(1-\cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\right) & \text{si } x<0 \end{cases}$**

   $a-$ Montrer que pour tout $x<0$, on a $0\le k(x)\le 2x^2$.

   $b-$ En déduire que k est continue en 0.

   $c-$ Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x)=\dfrac{\pi^2}{2}$. Interpréter graphiquement le résultat.

www.devoirat.net