Séance 4

Les équations à coefficients complexes

EXERCICE 1:

1) Déterminer les racines carrées de chacun des complexes suivants :

-16 , -2 , $2i$, $\sqrt{3}+i$, $3+4i$, $i.e^{i\frac{5\pi}{6}}$

2) a) Déterminer les racines quatrièmes puis les racines sixièmes du nombre complexe $z=-32+i.32\sqrt{3}$

b) Représenter alors dans chacun des deux cas les images des solutions sur le cercle de centre O dont on précisera le rayon.

EXERCICE 2:

1) a) Calculer $(2+i)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-3(2+i)z+2(3+4i)=0$

2) Soit l'équation (E') : $z^3-2(3+2i)z^2+(3+14i)z+8-6i=0$

a) Montrer que l'équation (E') admet dans $\mathbb{C}$ une solution imaginaire pure z_1.

b) Soit le polynôme $P(z)=z^3-2(3+2i)z^2+(3+14i)z+8-6i$

Déterminer les complexes a, b et c tels que : $P(z)=(z-z_1)(az^2+bz+c)$

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E').

EXERCICE 3:

Soit l'équation (E) : $z^2+2(\sqrt{3}+i)z+8+8\sqrt{3}i=0$

On désigne par z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E).

1) a) Sans calculer z_1 et z_2 vérifier que $|z_1.z_2|=16$ et $\arg(z_1\times z_2)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

b) Vérifier que $z_1=-4i$ est une solution de (E).

c) En déduire l'écriture exponentielle de z_2.

2) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $z^4+2(\sqrt{3}+i)z^2+8+8\sqrt{3}i=0$

EXERCICE 4:

1) On considère l'équation (E) : $z^2-2e^{i\frac{\pi}{5}}z+e^{i\frac{2\pi}{5}}-1=0$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on donne les points A, B et C d'affixes respectifs $z_A=2e^{i\frac{\pi}{5}}$, $z_B=1+e^{i\frac{\pi}{5}}$ et $z_C=-1+e^{i\frac{\pi}{5}}$

a) Montrer que $z_B=2\cos\left(\frac{\pi}{10}\right).e^{i\frac{\pi}{10}}$ et que $z_C=2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right).e^{i\frac{3\pi}{5}}$

b) Montrer que le quadrilatère OBAC est un rectangle.

EXERCICE 5:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Pour tout réel $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E_\theta): z^3-(3+2i\sin 2\theta)z^2+(2+4i\sin 2\theta)z-2i\sin 2\theta=0$

1) a) Vérifier que 1 est une solution de (E_θ)

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_θ).

2) On considère les points A, M et N d'affixes respectives $z_0=1$, $z_1=1+e^{i2\theta}$ et $z_2=1-e^{-i2\theta}$

a) Déterminer l'ensemble décrit par les points M lorsque θ décrit $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

b) Déterminer l'ensemble décrit par les points N lorsque θ décrit $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

3) Mettre z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

4) a) Montrer que le triangle AMN est isocèle en A.

b) Déterminer θ pour que le triangle AMN soit équilatéral.

EXERCICE 6:

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-(1+i)z+i=0$

b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\frac{e^{i\frac{2\pi}{3}}}{\bar{z}^2}-(1+i)\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{\bar{z}}+i=0$

2) θ étant un réel de $]0,\frac{\pi}{2}[$. On considère l'équation (E) : $z^2-2e^{i\theta}cos\theta\, z+e^{2i\theta}=0$

a) Montrer que $\left(2i.sin\theta.e^{i\theta}\right)^2=4e^{i2\theta}cos^2\theta-4e^{i2\theta}$

b) Montrer que $2i.e^{i\theta}sin\theta=e^{2i\theta}-1$ et que $2e^{i\theta}cos\theta=e^{2i\theta}+1$

c) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

3) Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On donne les points A et B d'affixes respectifs 1 et $e^{2i\theta}$

a) Déterminer l'ensemble des points B quand θ varie dans $]0,\frac{\pi}{2}[$.

b) Déterminer l'affixe du point C tel que le quadrilatère OACB soit un parallélogramme, puis vérifier que OACB est un losange.

c) Déterminer le réel θ pour que la mesure de l'aire $\mathcal{A}$ du losange OACB soit égale à $\frac{1}{2}$

(indication : Montrer d'abord que $\mathcal{A}=sin2\theta$)

EXERCICE 7:

Pour tout réel $\theta\in]0,\pi[$ on donne l'équation dans $\mathbb{C}$:

(E_θ) : $z^2-e^{i\theta}\left(1+e^{i\theta}\right)z+e^{i3\theta}=0$

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ).

b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E'_θ) : $z^6-e^{i\theta}\left(1+e^{i\theta}\right)z^3+e^{i3\theta}=0$.

2) Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soient A, B et C les points du plan d'affixes respectives 1, $e^{i\theta}$ et $e^{i2\theta}$.

a) Montrer que le triangle ABC est isocèle en B.

b) Montrer que ABC est équilatéral si et seulement si $\left|1+e^{i\theta}\right|=1$

3) a) Déterminer le module et un argument du complexe $1+e^{i\theta}$.

b) En déduire les valeurs de θ pour lesquelles le triangle ABC est équilatéral.